

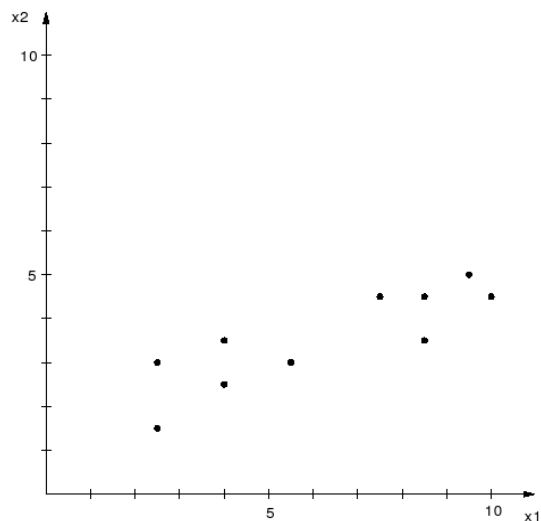
Minimalität und Orthogonalität **innerhalb eines** Medienobjekts
(Fourier und Wavelet-Transformation)

Karhunen-Loeve-Transformation (KLT) für Minimalität und
Orthogonalität bzgl. **mehrerer** Medienobjekten

Analyse der Verteilung der Feature-Werte **mehrerer**
Medienobjekte

Erkennung linearer Abhängigkeit anhand erkannter *Achsen*
andere Bezeichnung für KLT: Hauptachsentransformation
(HAT), principal component analysis (PCA)

Lineare Abhängigkeit: 10 Beispielpunkte



Lineare Abhängigkeit und Minimalität

lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz
→ Verletzung der Forderung nach Minimalität

Problem: Achsen oft nicht achsenparallel im Feature-Raum

Idee der KLT: Verschiebung und Rotation des Feature-Raums
→ Achsen entsprechen Feature-Dimensionen
→ Erwartungswert ist Koordinatenursprung

Entfernen von Achsen mit geringer Steuung

Berechnung Kovarianzmatrix aus
 m -dimensionalen Feature-Vektoren

$m \times m$ -Kovarianzmatrix $\{S_{kl}^2\}$:

Kovarianz zwischen Dimensionen k und l :

- ♦ 0 → keine lineare Abhängigkeit
- ♦ >0 → positive lineare Abhängigkeit
- ♦ <0 → negative lineare Abhängigkeit

Diagonalwerte entsprechen Varianzwerten einzelner Dimensionen

Kovarianzmatrix ist symmetrisch

→ Zerlegung in $U * L * U^T$ durch Lösen des Eigenwertproblems möglich

Kovarianzmatrix = $U * L * U^T$

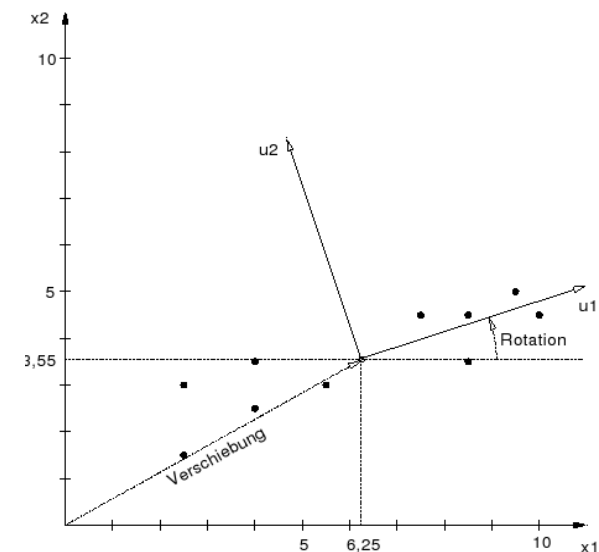
U^T enthält orthonormale Eigenvektoren (Achsen)

→ Transformation in Eigenraum

U entspricht Rücktransformation

L ist Diagonalmatrix: Diagonalwerte sind
Eigenwerte/Varianzwerte

→ achsenparallele Skalierung im Eigenraum



Transformation der Feature-Vektoren erzeugt achsenparallele Abhängigkeits-achsen (Translation um negierten Mittelwertsvektor und Multiplikation mit U^T)

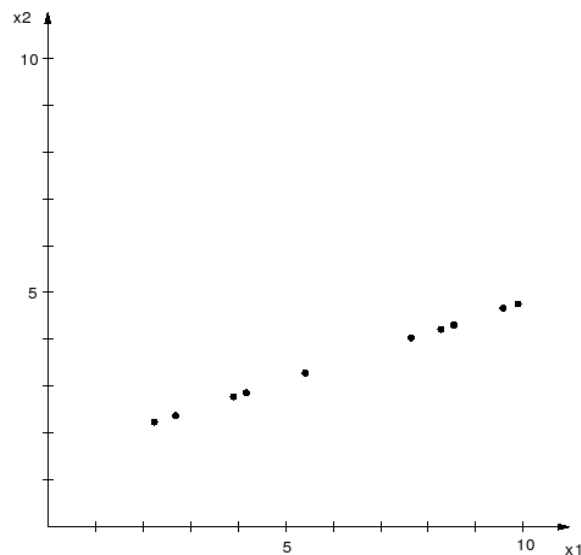
Sortieren der Achsen nach Varianzwert

Entfernen von Achsen mit geringer Varianz (unterhalb best. Schwellwert)

Rücktransformation bedeutet Entfernen linearer Abhängigkeiten (Multiplikation mit U und Translation um Mittelwertsvektor)

Reduktionsfehler abhängig von Eigenwerten der entfernten Achsen

→ Distanzen bleiben weitgehend erhalten



Vorteile der KLT

Orthogonalisierung:

- lineare Abhängigkeiten werden entfernt
- Werte der Achsendimensionen (inhärente Feature Dimension) isoliert manipulierbar
→ Trennung wesentlicher von unwesentlichen Dimensionen möglich

Vorteile der KLT (Forts.)

Minimierung: Entfernung unnötiger Dimensionen im Eigenraum
→ minimaler Reduktionsfehler

Invarianzen: isolierte Analyse von linear wirkenden Invarianzen möglich

Probleme der KLT

Berechnung auf **Menge** von Feature-Vektoren

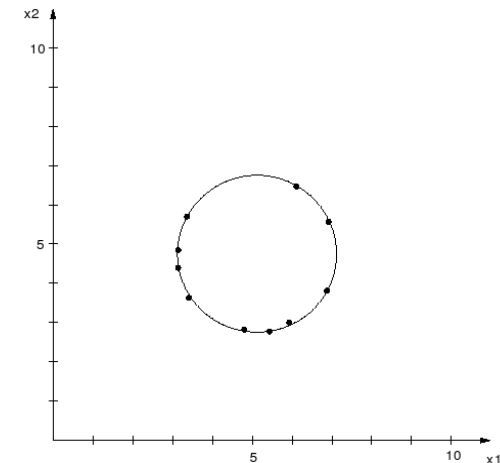
- ◆ Problem bei dynamischer Menge
- ◆ Lösungsansatz: Verwendung statischer repräsentativer Untermenge

Probleme der KLT (Forts.)

nicht-lineare Abhängigkeiten nicht erkennbar

orthogonale Achsen: nicht immer erwünscht

Ausweg: ICA (independent component analysis)



Ausgangspunkt ist Menge von n
 m -dimensionalen Feature-Vektoren
 $\rightarrow m \times n$ Feature-Matrix

Beispiel: $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$F = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,5 & 4 & 4 & 5,5 & 7,5 & 8,5 & 8,5 & 9,5 & 10 \\ 1,5 & 3 & 3,5 & 2,5 & 3 & 4,5 & 4,5 & 3,5 & 5 & 4,5 \end{pmatrix}$$

Mittelwertvektor:

Beispiel: $\begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \vdots \\ \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$ mit $\bar{f}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \bar{f}_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 3,55 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix: $S^2 = \{s_{kl}^2\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Beispiel: $s_{kl}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f_{ki} - \bar{f}_{k*})(f_{li} - \bar{f}_{l*})$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 8,3472 & 2,6806 \\ 2,6806 & 1,1917 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = U * L * U^T$$

da symmetrisch, Zerlegung anhand Eigenvektoren möglich:

L enthält Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

U ist orthonormal und Spaltenvektoren entsprechen den Achsen

Durchführung Permutation der drei Matrizen, damit gilt $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$

Beispiel:

$$U = \begin{pmatrix} 0,9488 & -0,316 \\ 0,316 & 0,9488 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 9,24 & 0 \\ 0 & 0,2989 \end{pmatrix}$$

Transformation von Feature-Vektor f_{*j}

Beispiel: $f'_{*j} = U^T * \begin{pmatrix} f_{1j} - \bar{f}_{1*} \\ f_{2j} - \bar{f}_{2*} \\ \vdots \\ f_{mj} - \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$

$$F' = \begin{pmatrix} -4,2 & -3,7 & -2,1 & -2,5 & -0,9 & 1,5 & 2,4 & 2,1 & 3,5 & 3,8 \\ -0,8 & 0,7 & 0,7 & -0,3 & -0,3 & 0,5 & 0,2 & -0,7 & 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$$

$$f_{*j} = U * f'_{*j} + \begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \bar{f}_{2*} \\ \vdots \\ \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

Entfernen von Achsdimensionen mit geringer Varianz
Abschätzung über Anteil an Gesamtvarianz:

$$\text{Anteil}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j}$$

Beispiel: 1. Achse hat 97 Prozent und zweite Achse 3 Prozent
→ Weglassen der zweiten Achsendimension

f''_{*j} sei Ergebnis der Reduktion von f'_{*j}

Rücktransformation von f''_{*j} erzeugt $\tilde{f}_{*j} \neq f_{*j}$

Erhalt nur der p ersten Achsendimensionen
Erwartungswert des quadrierten Fehlers:

$$R^2 = E\{\|\tilde{f}_{*j} - f_{*j}\|^2\}$$

es gilt:

$$R^2 = \sum_{i=p+1}^m \lambda_i$$