6 Distanzfunktionen

1. Eigenschaften und Klassifikation

2. Distanzfunktionen auf Punkten
   - Minkowski-Distanzfunktion L_m
   - Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion L_m^w
   - Quadratische Distanzfunktion d_q
   - Quadratische Pseudo-Distanzfunktion
   - Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
   - Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
   - Kullback-Leibler-Abstandsfunktion
   - Bahattacharyys-Abstandsfunktion

6 Distanzfunktionen (2)

<is web>

3. Distanzfunktionen auf Binärdaten

4. Distanzfunktionen auf Sequenzen
   - Earth-Mover-Distanzfunktion
   - DFT-L_2-Distanzfunktion
   - Editierdistanz

5. Distanzfunktionen auf allgemeinen Mengen
   - Bottleneck-Distanzfunktion
   - Distanzfunktion über das Volumen der symmetrischen Differenz
   - Hausdorff-Distanzfunktion
   - Fréchet-Distanzfunktion

Einführung

<is web>

paarweiser Vergleich der Feature-Werte von Medienobjekten

hier die häufigsten Distanzfunktionen analysiert nach Eigenschaften

Eigenschaften nutzbar zur Konfiguration eines MMDBS bzgl. Suchszenario

Distanzen auf Punkten, Binärdaten, Sequenzen und allgemeinen Mengen

Aktuelle Arbeiten

<is web>

Distanzfunktionen auf Flickr-Tags und daraus abgeleitet auf Flickr-Anfragen von R. Abbasi@ISWeb

Wichtig:

- Asymmetrie
- Generalisierung von Termen
  - Koblenz -> Deutschland
  - Nicht: Deutschland -> Koblenz

Aktuelle Arbeiten

ISWeb mit Claudia d'Amato@Bari

Ähnlichkeiten auf komplexen logischen Ausdrücken:
- Beschreibungslogik
  - Komplexe Anforderungen
    (z.B. Koblenz ist ähnlicher zu Frankfurt als zu London)
  - Auf Objekten (haus1 vs haus2 vs haus3)
  - Auf Begriffen (Haus vs Baum vs Strasse)

6.1 Eigenschaften und Klassifikationen

Abbildung Feature-Werte zweier Medien-Objekte auf nichtnegative, reelle Zahl

Distanzwert 0 bedeutet maximale Ähnlichkeit

Invarianz einer Distanzfunktion
→ also Unabhängigkeit bzgl. Operation

- $g: d(g(o_1), g(o_2)) = d(o_1, o_2)$
- Skalierung
- Rotation

Formale Eigenschaften einer Distanzfunktion

binäre Funktion $d(o_1, o_2)$ mit $d : O \times O \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
und

Selbstidentität (Si): $\forall o \in O : d(o, o) = 0$

Positivität (Pos): $\forall o_1 \neq o_2 \in O : d(o_1, o_2) > 0$

Symmetrie (Sym): $\forall o_1, o_2 \in O : d(o_1, o_2) = d(o_2, o_1)$

Dreiecksungleichung (Dreieck):

$$\forall o_1, o_2, o_3 \in O : d(o_1, o_3) \leq d(o_1, o_2) + d(o_2, o_3)$$

Klassifikation anhand Erfüllung der Eigenschaften

Klasse	Si	Pos	Sym	Dreieck
Distanzfunktion	✓	✓	✓	✓
Pseudo-Distanzfunktion	✓	–	✓	✓
Semi-Distanzfunktion	✓	✓	✓	–
Semi-Pseudo-Distanzfunktion	✓	–	✓	–

Beispiele von Distanzfunktionen

<is web>

absoluter Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen

$$d_{abs} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{abs}(r_1, r_2) \mapsto |r_1 - r_2|$$

euklidsche Distanzfunktion d_{L_2} auf Punkten p_i der Menge $\mathbb{R}^n$

$$d_{L_2} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_2}(p_1, p_2) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_1[i] - p_2[i])^2}$$

Beispiel einer Pseudo-Distanzfunktion

<is web>

indiskrete Pseudo-Distanzfunktion, die jedem Elementepaar aus $O \times O$ den Wert 0 zuweist:

(Funktion ist praktisch sinnlos)

$$d_{indiskret} : O \times O \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{indiskret}(o_1, o_2) \mapsto 0$$

Beispiel einer Semi-Distanzfunktion

<is web>

Semi-Distanzfunktion d_{semi} auf der Menge {a, b, c}:

d_{semi}	**a**	**b**	**c**
a	0	1	3
b	1	0	1
c	3	1	0

Die Dreiecksungleichung ist nicht garantiert:

$$\begin{aligned} d_{semi}(a, c) &\not\leq d_{semi}(a, b) + d_{semi}(b, c) \\ 3 &\not\leq 1 + 1 \end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften von Distanzfunktionen

<is web>

folgende Eigenschaften werden an konkreten Funktionen getestet:

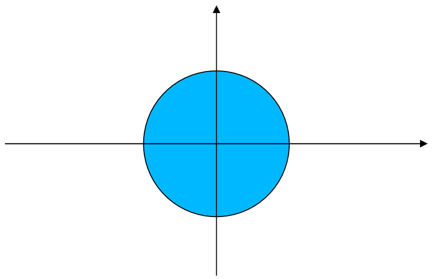
Invarianz bzgl.

- Translation anhand Translationsobjekt *T*:
  $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(o_1 + T, o_2 + T)$
- Skalierung anhand Skalar *S*:
  $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) =$ **d(S*o$_1$,S*o$_2$)**

  Fehler im Buch
- Rotation anhand Rotationsobjekt *R:*
  $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(R * o_1, R * o_2)$

Weitere Eigenschaften von Distanzfunktionen (2)

Darstellung des Einheitskreises:
alle Punkte $o \in O$, für die $d(z, o) = 1$ gilt
(z ist Zentrum)



Nicht jeder Einheitskreis besitzt Kreisform!

Distanzeigenschaften im Einheitskreis

verschiedene Eigenschaften sind graphisch aus Einheitskreis erkennbar:

Selbstidentität: Zentrum liegt auf Kreis mit Radius 0.

Positivität: Alle Punkte ungleich Zentrum liegen außerhalb des Kreises mit dem Radius 0

Distanzeigenschaften im Einheitskreis (2)

Translationsinvarianz: Einheitskreis ändert Form nicht, wenn Zentrum verschoben wird

Symmetrie: bei Translationsinvarianz und Symmetrie teilt Zentrum jede Diagonale zwischen zwei Randpunkten in genau zwei gleich lange Teile

Rotationsinvarianz: Einheitskreis ist bzgl. Zentrum rotationssymmetrisch

6.2 Distanzfunktion auf Punkten

Datentyp: `array [1..n] (real)`

Minkowski-Distanzfunktion L_m

Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion L_m^w

Quadratische Distanzfunktion d_q

Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

6.2 Distanzfunktion auf Punkten (2)

Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
Kullback-Leibler-Abstandsfunktion
Bhattacharyya-Abstandsfunktion

Minkowski-Distanzfunktion

L_m

am häufigsten eingesetzte Distanzfunktion auf Punkten mit $m > 0$:

$$d_{L_m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_m}(p_1, p_2) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m}$$

Sonderfall bei :

- $m = 1$: Manhattan-Distanzfunktion oder Blockdistanzfunktion
- $m = 2$: euklidsche Distanzfunktion
- $m = \infty$: Max-Distanzfunktion oder Tschebyscheff-Distanzfunktion

$$m = \infty$$

$$d_{L_\infty} = d_{L_{max}}(p_1, p_2) \mapsto \max_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|$$

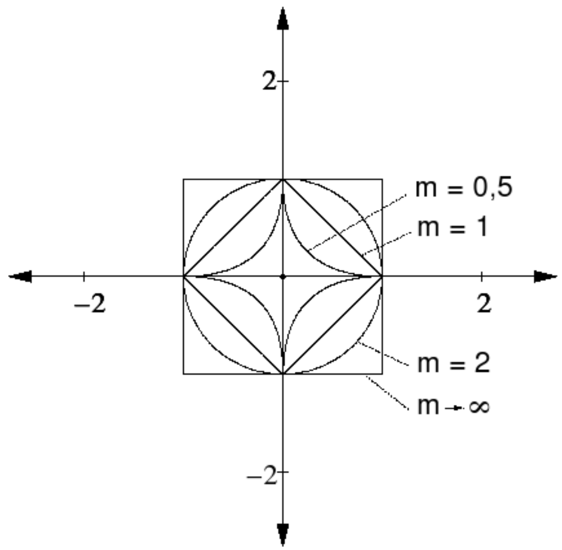
Translationsinvarianz

T sein ein n -dimensionaler Vektor, der durch die Differenzberechnung aus der Formel verschwindet:

$$\begin{aligned} d_{L_m}(p_1 + T, p_2 + T) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |(p_1[i] + T) - (p_2[i] + T)|^m \right)^{1/m} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m} \\ &= d_{L_m}(p_1, p_2) \end{aligned}$$

aber keine Skalierungs- oder Rotationsinvarianz

Einheitskreise



Holdersche Ungleichung

es gilt immer:

$$(|a_1|^{m_1} + \ldots + |a_n|^{m_1})^{1/m_1} \leq (|a_1|^{m_2} + \ldots + |a_n|^{m_2})^{1/m_2} \text{ für } m_1 \geq m_2 \geq 1$$

also: Einheitskreis mit niedrigem m-Wert liegt innerhalb Einheitskreises mit höherem m-Wert

Sonderfall euklidsche Distanzfunktion (m=2)

entspricht Länge der Geraden durch beide Punkte
Einheitskreis ist kreisförmig
Rotationsinvarianz ist erfüllt, da R Orthonormalmatrix

$$(R^T * R = R * R^T = I)$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{aligned} d_{L_2}(R * p_1, R * p_2) &= \sqrt{(R * p_1 - R * p_2)^T * (R * p_1 - R * p_2)} \\ &= \sqrt{(R * (p_1 - p_2))^T * (R * (p_1 - p_2))} \\ &= \sqrt{(p_1 - p_2)^T * R^T * R * (p_1 - p_2)} \\ &= \sqrt{(p_1 - p_2)^T * (p_1 - p_2)} \\ &= d_{L_2}(p_1, p_2) \end{aligned}$$

$$d_{L_2}(p_1, p_2) = \sqrt{(p_1 - p_2)^T * (p_1 - p_2)}$$

Berechnung von Reihenfolgen anhand Minkowski-Dist.-fkt. L_m

Achtung: unterschiedliche m-Werte erzeugen unterschiedliche Reihenfolgen!

Beispiel:

Abstände dieser Punkte vom Koordinaten-ursprung :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } p_2 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

$$d_{L_1}(O, p_1) = 1 \text{ und } d_{L_1}(O, p_2) = 1.6$$

$$d_{L_\infty}(O, p_1) = 1 \text{ und } d_{L_\infty}(O, p_2) = 0,8$$