Untersuchungen zur Kompetenzstruktur in der Algebra

Reinhard Oldenburg, Landau 29.4. 2013

Gliederung

- Normative Vorüberlegungen
- Strukturuntersuchungen
  - Zur Stellung der Algebra in der Mathematik
  - Zur Binnenstruktur der Algebra
- Perspektiven und Fazit

Warum Algebraunterricht?

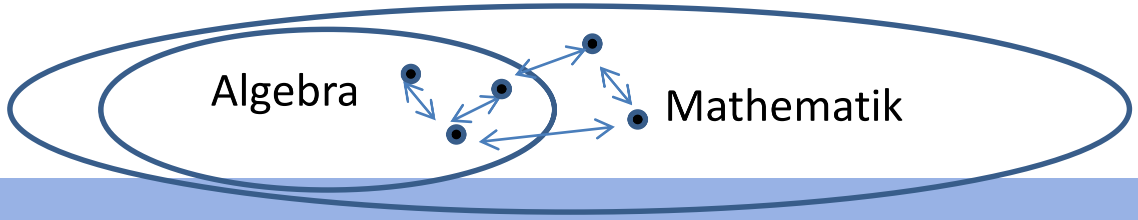
- Die Notwendigkeit von Algebraunterricht (und damit von Algebradidaktik) kann aus verschiedenen Gründen kritisch gesehen werden:
  - Existenz von Computeralgebrasystemen [Herget,…..]
  - Geringe Relevanz der Algebra im Alltag [Heymann,…]
  - Geringer Erfolg, geringe Beliebtheit
- These: Algebra ist immer noch unersetzlich
- Algebra ist relevant, denn…
  - Sie zeigt, dass Mathematik sucht nach Lösungen für ganze Problemklassen sucht
  - Schulung von Generalisierungsfähigkeit und Problemlösen (auch) durch Symbolisieren
  - Sie ist Reflexionsanlass für: formalen Sprachen, Entwicklung und Bewertung von Algorithmen; Grenzen der Algorithmen
  - Tor zur höheren Mathematik (Analysis, Vektorrechnung, …)
  - Hilfsmittel zur Nutzung von Tabellenkalkulationsprogrammen
  - um modellhaft zu verstehen, wie eine Größe eine andere beeinflusst (Funktion), oder wie mehrere Größen zusammenhängen (Relation)
  - Algebra ist die Schnittstelle zwischen Mathematik und Computer

Algebradidaktik – Forschungsstand

- Einerseits: Algebradidaktik hat bereits eine bemerkenswerte Forschungsliteratur hervorgebracht
  - ICMI-Study 12 (Stacey et al.) Teaching of Algebra; Bednarz et al: Approaches to Algebra; national: Malle, Vollrath&Weigand
    - Klassifikation von Zugängen zur Algebra
  - Tests: Küchemann, Stacey
  - Ausgereifte Theorien
    - Reifikation [Sfard 1993,…]
    - Procept-Konzept [Gray&Tall 1994, Tall et al. 2000…]
    - Semiotik [Filloy et al. 2008,…]
- Andererseits: Es gibt noch viele Bereiche zu denen keine theoriegestützten verlässlichen Aussagen möglich sind.

Zur Struktur algebraischer Kompetenz

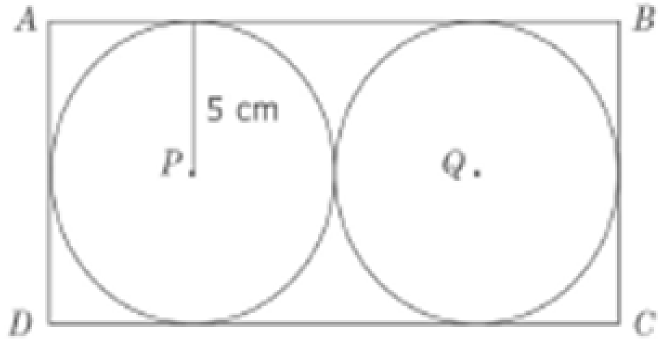
- Persönlicher Weg zur Strukturfrage:
  - Erfahrener Lehrerkollege: „Wenn SuS das Umformen gründlich lernen, verstehen sie auch, was sie tun.“
  - Erste Reaktion: Zweifel, aber Mangel an empirischen Erkenntnissen
- Ergänzungsstudie von Neubrand&Neubrand zu PISA-D:
  - Skalen „Modellierungsitems“ und „technische Items“: Korrelation 0,98
  - Folge der Testkonstruktion für das 1d-Rasch-Modell?
- Aber: Engelbrecht, J. et al. 2005: “conceptual and procedural tasks”: r=0.59
- Forschungsfragen (Grob-Fassung):
  - Welche Beziehungen gibt es zwischen den Fähigkeiten in Algebra und im Rest der Mathematik?
  - Wie ist algebraische Kompetenz intern strukturiert?



Teilfrage: Beziehungen zwischen Fähigkeiten in Algebra und im Rest der Mathematik

- Fragen
  - Gibt es auch in den Daten von Rasch-skalierbaren Tests Hinweise auf eine nicht-triviale Struktur?
  - Können Anregungen für die Theoriebildung gewonnen werden?
- Data Mining mit „Statistical Implicative Analysis“ (SIA) [Gras et al. 2008]
  - Nicht Struktur-prüfend, sondern Struktur-entdeckend
  - Grundfrage bei SIA: Stützen erhobene Daten eine Implikation A⇒B? Dabei bedeutet A⇒B,
    - dass ein Schüler, der Aufgabe A kann, auch Aufgabe B kann
    - oder, dass ein Schüler, der aus Skala A gut abschneidet auch auf Skala B eher oben liegt
  - Test der Zahl der beobachteten Gegenbeispiele gegen die erwartete Zahl bei Unabhängigkeit
- Daten: TIMSS 2003 für England (und Italien, Israel zum Vergleich)
  - TIMSS besteht aus verschiedenen Testheften, es gibt aber keine Multi-Matrix-Version von SIA
  - Also: Testhefte werden getrennt ausgewertet

Teilfrage: Beziehungen zwischen Fähigkeiten in Algebra und im Rest der Mathematik



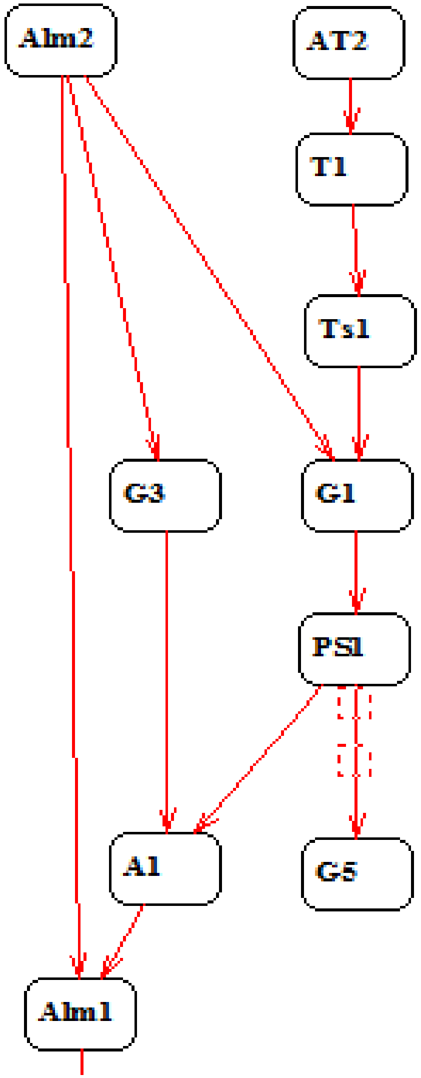
In the figure above, $ABCD$ is a rectangle, and circles P and Q each have a radius of 5 cm. What is the area of the rectangle?

Ⓐ $50\ \text{cm}^2$

Ⓑ $60\ \text{cm}^2$

Ⓒ $100\ \text{cm}^2$

Ⓓ $200\ \text{cm}^2$



Erklärung der Implikation: Beide Aufgabe fordern die Fähigkeit, bekannte und unbekannte Größen in Beziehung zu setzen

Diese Erklärung ist stabil: Auch in anderen Testheften gibt es Implikationen, die sich so gut erklären lassen

Teilfrage: Beziehungen zwischen Fähigkeiten in Algebra und im Rest der Mathematik

- Mit gleicher Erklärung

The three figures below are divided into small congruent triangles.

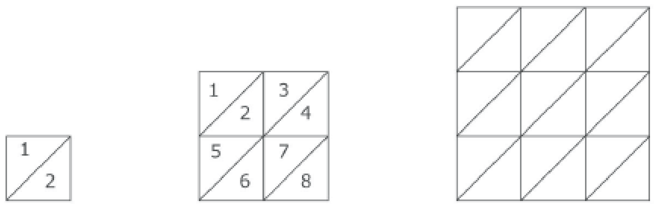
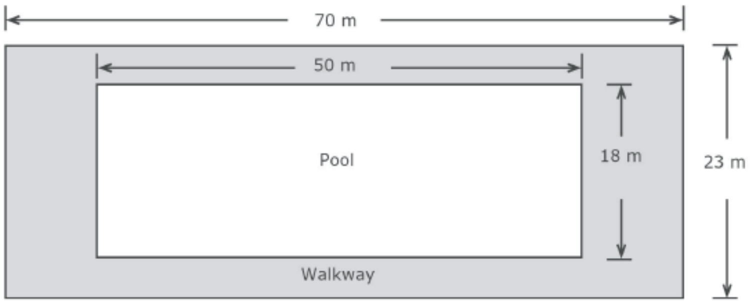


Figure 1 Figure 2 Figure 3

C. The sequence of figures is extended to the 50th figure. Explain a way to find the number of small triangles in the 50th figure that does not involve drawing it and counting the number of triangles.

A rectangular shaped swimming pool has a paved walkway around it as shown.



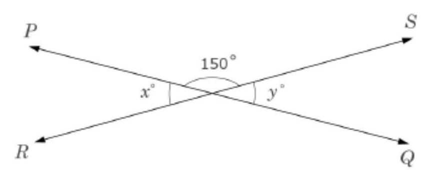
What is the area of the paved walkway?

Ⓐ 100 m^2
Ⓑ 161 m^2
Ⓒ 710 m^2
Ⓓ 1610 m^2

If $\frac{a}{b} = 70$, then $\frac{a}{2b} =$

Ⓐ 35
Ⓑ 68
Ⓒ 72
Ⓓ 140

In the figure, PQ and RS are intersecting straight lines.



What is the value of $x + y$?

Ⓐ 15
Ⓑ 30

Teilfrage: Beziehungen zwischen Fähigkeiten in Algebra und im Rest der Mathematik

- Ebenso sind Aufgaben, die proportionales Denken fordern, über verschiedene Stoffgebiete implikativ verwandt
- Arithmetik und syntaktische Algebraaufgaben (genaue Def. kommt) sind eng verwandt. Bspw. gilt: „Wer 4(x+5)=80 lösen kann, ist auch gut im Subtrahieren vierstelliger Zahlen”. Offensichtliche Gemeinsamkeit: Kalkül
- Auf der Ebene der Performanz in TIMMS ist die bei den Schülern entwickelte Kompetenz weniger nach Fachgebieten strukturiert, als nach grundlegenden kognitiven Operationen wie Umgang mit Unbekannten, Veränderungstendenzen, sorgfältige Kalkülanwendung
- Fazit: Algebra steht in enger Wechselwirkung mit anderen Gebieten. Das stützt folgende Vermutungen:
  - Algebraisches Denken ist auch jenseits der Algebra relevant
  - Nicht-algebraische Themen, insbesondere Geometrie, können algebraische Kompetenzen fördern [Fairchild 2000]

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Fragen:
  - Wie stark sind inhaltliche und syntaktische Aufgaben in Algebratests korreliert?
  - Wie lässt sich die Struktur algebraische Kompetenz modellieren?
  - Geben die relevanten Variablenaspekte [Malle 1993, Küchemann 1978] eine gute Strukturerklärung?
- Daten: Algebra-Test mit Schülern der Jgst 11
  - Leitfrage: Sind die algebraischen Grundlagen für Differentialrechnung vorhanden
  - Durchgeführt 2008 (mit n=179) und leicht verändert 2009 (mit n=168) und 2011(n=125)
  - Im Wesentlichen konsistente Ergebnisse über Schulen und Jahrgänge
  - Im Folgenden: Bericht der Daten aus 2011

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Definition: Inhaltliche (Semantische) Items sind solche, bei denen eine Vorstellung zum Inhalt (mentales Modell) – beim vermuteten Lösungsweg – gebildet werden muss
- Typische Inhaltliche Items [PISA, Küchemann 1978, Oldenburg 2009]:
- **Item 11**: Welcher Term bezeichnet das Dreifache von a?
- ( ) a + 3 ( ) a·3 ( ) a1 + a2 + a3 ( ) 3 · a ( ) a · a · a ( ) a+a+a
- **Item 4**: Es sei *b* die Anzahl der Brötchen und *h* die Anzahl der Hörnchen bei einem Einkauf. Ein Brötchen kostet 30 Cent, ein Hörnchen 70 Cent.
- a) Was bedeutet 30*b*+70*h*?
- b) Wie viele Teile wurden insgesamt gekauft?
- **Item 9c**: *a* und *b* sind zwei Zahlen. Angenommen, es gilt immer *a*=2*b*+3, was passiert mit *b*, wenn *a* um 2 größer wird?
  - Dazu später mehr

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- **Item 5**: a) Aaron ist *a* Zentimeter groß, Berta ist *b* cm groß. Berta ist 10cm kleiner als Aaron. Drücken Sie das durch eine Gleichung in den Variablen *a* und *b* aus [61% in Klasse 11]

  b) Jan besitzt dreimal so viel Geld wie Max. Beschreiben Sie das mit Variablen.[32%]

  Fazit: Hier dominieren *passive* Fähigkeiten. Symbolisieren!
- **Item 18**: In Phantasia misst man die Temperatur nicht in Celsius. Unsere Temperatur 0°C entspricht dort 10° und unsere Temperatur 100°C entspricht 50°. Geben Sie eine Formel zur Umrechnung von Celsius-Temperatur T in Phantasiatemperatur P an.
- **Item 20**: In einer Schachtel sind 54 Kugeln in zwei Farben. Es sind doppelt so viele rote wie schwarze Kugeln. Stellen Sie Gleichungen in den Variablen r, s der Kugel-Anzahlen auf, die diese Situation beschreiben.

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Definition: Syntaktische Items erfordern nur Manipulationen, die durch die syntaktische Struktur des algebraischen Ausdrucks nahe gelegt werden (lösbar durch term rewriting system)
- Typische syntaktische Items sind
  - $(a-3)^2-a^2=\ldots$
  - $\sqrt{36+4a^2}=\cdots$
  - $\frac{12x}{2x+4x^2}=\ldots$
- Arithmetikitems sind nicht Teil der syntaktischen Aufgaben (obwohl verwandt)
- Neue Erkenntnis seit 2010: Das kalkülhafte Lösen von Gleichungen ist verwandt, stellt aber keine *rein* syntaktische Anforderung dar.

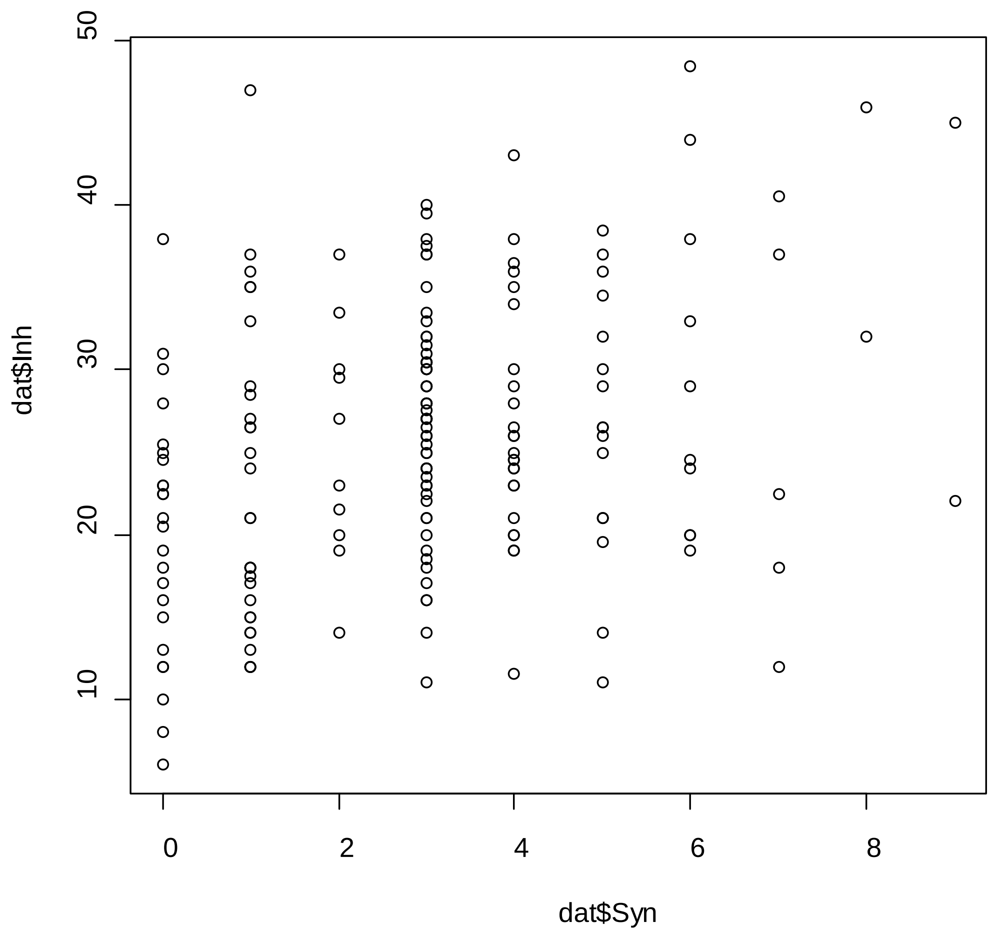
Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

Vierfeldertafel zur Beziehung inhaltlich-syntaktisch

Zahl der Schüler (2011, 2008er Test)		Punktzahl in **syntaktischen** Items	
		Überdurch-schnittlich	Unterdurch-schnittlich
Inhaltliche Items	Überdurch-schnittlich	34% 26%	18% 19%
	Unterdurch-schnittlich	15% 26%	32% 29%

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Als Scatterplot
- 2008



Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Syntaktische und inhaltliche Bereiche sind fast unabhängig
  - Korrelation: (2008/09er-Daten: r=0,33 niedrig; 2011: r=0,42)
- Interessanter Unterschied zum PISA-Befund (Neubrand), der die Werte bei der verwandten Klassifikation in technische Aufgaben und Modellierungsaufgaben hoch korreliert sieht (r=0,98)
- Erklärung? Bei PISA Itemauswahl in Hinblick auf das Raschmodell – Aber: TIMSS03 Klassifikation Syntaktisch-Inhaltlich führt ebenfalls auf r=0,33
- Erklärung: Modellbildungsaufgaben $\neq$ Inhaltliche Items
- Es wäre interessant, extreme Schüler interpretativ zu erforschen:
  - Welche Strategien erlauben einem, ohne jedes inhaltliche Verständnis Terme korrekt auszumultiplizieren?
  - Wie kann es sein, dass man Terme aufstellen und interpretieren kann, aber trotzdem $\sqrt{(x^2+4)}=x+2$ rechnet? Wieso versagt die Fähigkeit der Interpretation?

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Die Struktur algebraischer Teilkompetenzen wurde anhand des obigen Tests noch weiter untersucht.
- Teilkompetenzen:
  - Syn: Syntaktische Items
  - Fun: Funktionen und ihre Darstellungen
  - Eq: Gleichungen Lösen (technisch) Bsp: Löse 2(x-5)=5-2x
  - Rel: Relationen, Gleichungen, Beziehungen (modellierend)
  - Gen: Generalisierte Arithmetik
  - Geo: Geometrische Anwendungen der Algebra
  - Subs: Substitution
- Strukturuntersuchung durch Faktorenanalyse und SEM

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Fun-Items:

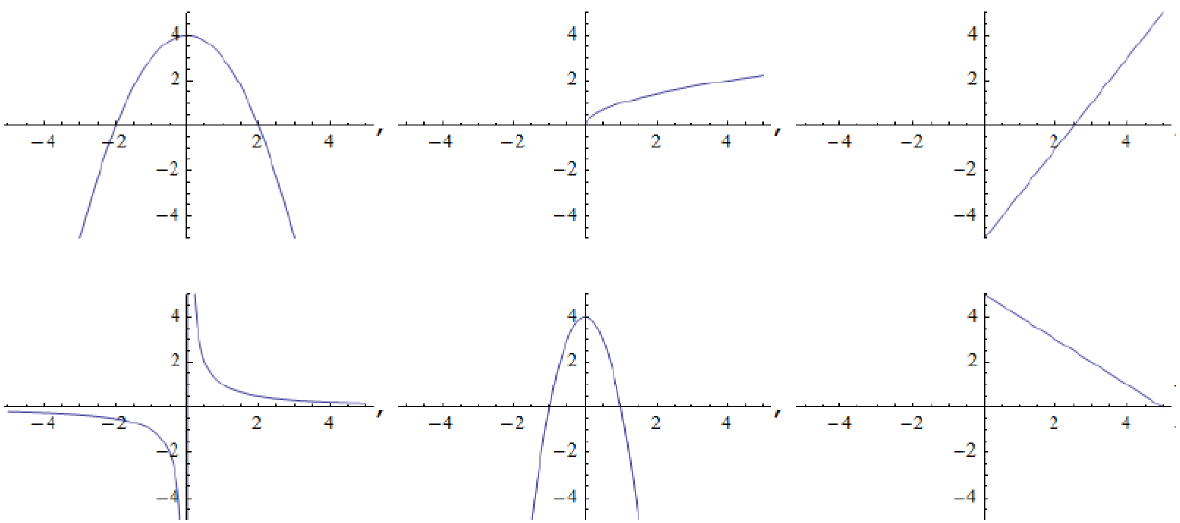
Aufgabe 3: Ordnen Sie zu: Welcher Graf gehört zu welcher Wertetabelle und zu welchem Funktionsterm?

Terme: a) $f(x)=2x-5$ b) $f(x)=4-x^2$ c) $f(x)=1/x$ d) $f(x)=5-x$ e) $f(x)=4-4x^2$ f) $f(x)=\sqrt{x}$

Tabellen:

x	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	5	0	-5	-	4	4
1	4	1	-3	1	0	3
2	3	1,141	-1	0,5	-12	0
3	2	1,732	1	0,333	-32	-5

I II III



IV V VI

Zordnung (Beispiel k=G=VII): ______________________

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

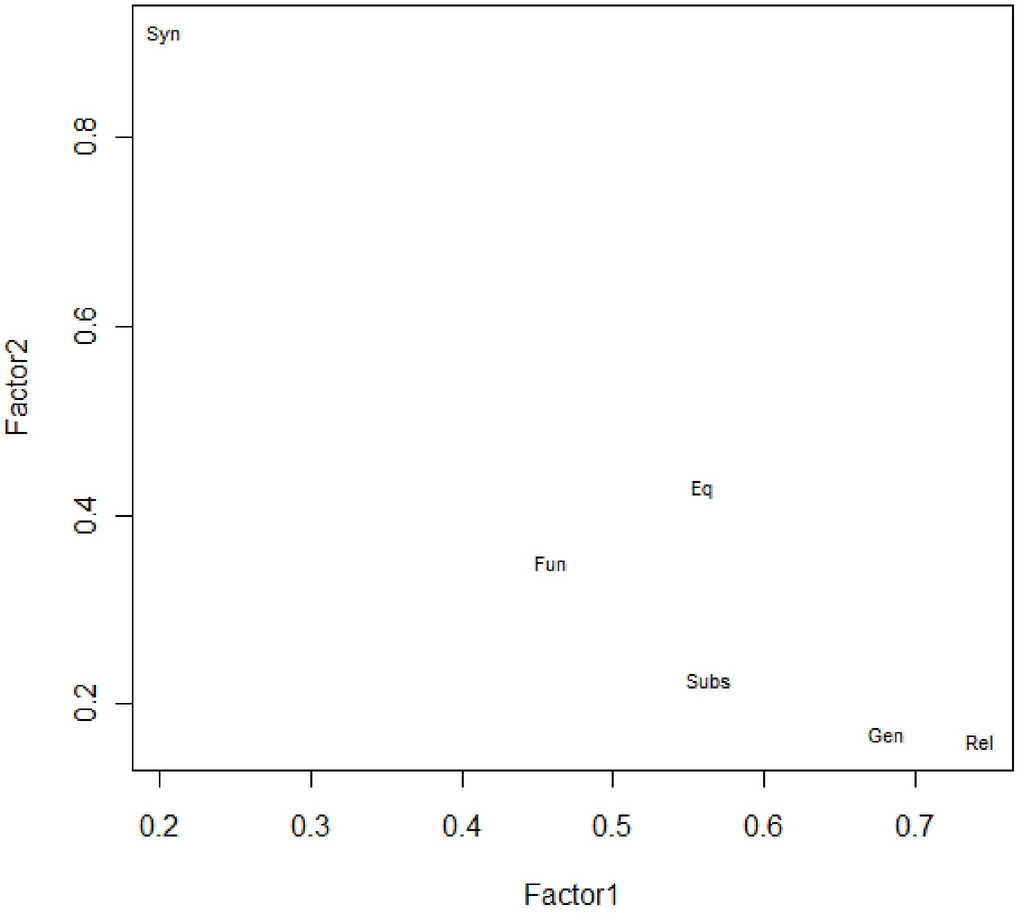
- Rel: Relationale Items: Beziehung zwischen Unbestimmten
  - Obige Aufgabe zu Aaron&Jan (Größenrelation)
  - Obige Temperaturaufgabe
  - Angenommen, es gilt immer $a=b+3$, was passiert mit b, wenn a um 2 größer wird?
- Gen: Generalisierte Arithemetik:
  - Was ist größer? $n+2$ oder $2n$? [Chelsea-Test]
  - Es gilt $7 \cdot 9 = 8^2 - 1$ und $11 \cdot 13 = 12^2 - 1$. Formulieren Sie das als allgemeine Regel und begründen Sie diese.

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Subs: Items zur Substitution (Vorwärts und Rückwärts)
  - Eine Funktion ist definiert durch: $f(x)=x^3-2$. Berechnen Sie:
    $f(y)=$ $f(x+1)=$
  - Man weiß, dass $x=6$ eine Lösung ist von $(x+1)^3+x=349$. Wie kann man dann möglichst einfach eine Lösung finden von $(5x+1)^3+5x=349$?
  - Was muss man in den Term $2(x^2-1)$ für x einsetzen, damit sich als Ergebnis ergibt…
    -2 $2((a+1)^2-1)$ $2(b^2+2b)$

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Faktoranalyse
- Interpretation:
  - Sonderstellung der syntaktischen Items
  - Faktor 1: Funktional-Relational
  - Faktor 2: Semantisch-Syntaktisch
  - (2008er Daten haben das noch etwas deutlicher gemacht)

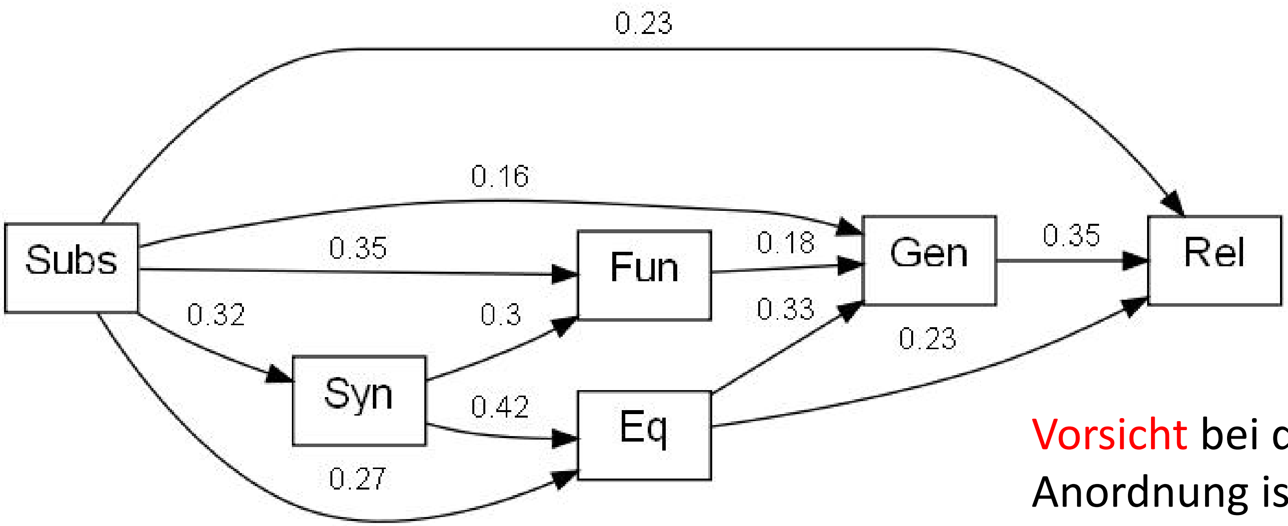


Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Auswertung mit SEM
- Skalenqualität
- Reliabilität: Cronbachs Alpha:
  - "Syn" 0.52 "Geo" 0.82 "Fun" 0.76 "Rel“ 0.69
    "Eq" "0.67 "Gen" 0.64 "Subs" 0.71
- Normalverteilungshypothese muss nach Kolmogorov-Smirnov bei allen außer Gen und Rel verworfen werden
- Allerdings: SEM robust gegen Verletzung der Normalverteilungsannahme laut: R.O. Mueller, R. O. Mueller: SEM a Second Course, 2006
  - SEM anwendbar, falls: Schiefe<2 und Kurtosis<7
- In den Daten gilt sogar Schiefe<1 und Kurtosis<3 für alle Skalen außer Geo
  - Die Skala Geo wird in der weiteren Auswertung nicht mehr berücksichtigt

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Das beste gefundene Modell
  - AGFI=0.97, NFI = 0.99, RMSEA = 0.0, CFI=1.0, SRMR = 0.02
  - Sehr guter Model fit



Vorsicht bei der Interpretation: Die Anordnung ist willkürlich, aber suggestiv
Kausale Interpretation riskant!
Insbesondere ist hieraus keine Sequenzierung im Unterricht begründbar

Teilfrage: Struktur der Algebrakompetenz

- Selbstkritische Fragen:
- Reicht die Skalenqualität?
  - Cronbach α nur zwischen 0.5 und 0.8
- Validität offen
- Ist SEM überhaupt ein angemessenes Verfahren?
  - Vermutete Nichtlinearität
- Die Ergebnisse sind stabil, wenn man sich auf Teilpopulationen einschränkt, aber…
  - Sind die gefundenen Pfadmodelle auch anwendbar bei anderen Items und in anderen Jahrgangsstufen?
- Wie groß ist der diagnostische Wert?
  - Individuelle Rückmeldung wurde generiert, Nutzen aber nicht evaluiert

Exkurs zum Veränderlichenaspekt

Ein Item zu Änderungen

- Das Item: (Freiformantworten) **Aufgabe 9**:
  - a) Angenommen, es gilt immer $a=b+3$, was passiert mit a, wenn b um 2 größer wird?
  - b) Angenommen, es gilt immer $a=b+3$, was passiert mit b, wenn a um 2 größer wird?
  - c) Angenommen, es gilt immer $a=2b+3$, was passiert mit b, wenn a um 2 größer wird?
- Item 9a stammt aus Küchemann [1978]
- Fülle interessanter Antworten, z.B. bei 9c:
  - b wird um 1 größer
  - Die Gleichung gilt nicht mehr
  - a+2=2b+3 Interessanterweise nie a-2=2b+3
  - a+2=2b+3+2

Ein Item zu Änderungen

- Das ist die **externe** Fehlinterpretation der Änderung:
  $a+2=2b+3 \quad a+2=2b+3+2$
  – Die 2 kommt extern zu a hinzu
  – Analoge Antworten bei 9a und 9b
  – Ähnlicher Fehlertyp wurde bei Malle beschrieben
- Im Gegensatz dazu: **Interne** Änderung: Der Wert von a ändert sich, am Symbol a und seinem Kontext wird keine Änderung vorgenommen – b muss sich ändern, damit die Gleichung noch gilt
- Gray [2009]: Studie mit College Calculus Studierenden: Korrekte (im Sinne der internen Änderung) Antwort auf 9a ist guter Indikator für Erfolg in Analysis.

Ein Item zu Änderungen

- Vergleich der folgenden beiden Teilgruppen:
  - Externe Interpretation der Änderung (5,4%)
  - Alle anderen
- Beide Gruppen unterscheiden sich signifikant im Gesamtergebnis des Tests (t-Test, p=0.025, Cohen d=0.76, starker Effekt nach Lipsey 1990)
- Schüler mit externer (Fehl-)Interpretation sind besser!
- Warum?
  - Keine einschlägige Erklärung in Literatur gefunden

Ein theoretisches Modell

- Was bedeutet Änderung?
  - Intern: Wert einer Variablen ändert sich
  - Extern: Eine Zahl (Term) wird durch andere Zahl (Term) ersetzt
- Beide Fassungen werden im Unterricht angeregt:
  - Intern:
    - Funktionsgraph, Wertetabelle von $y=x^2$
    - Physikunterricht: $P=U\cdot I$
    - DGS, TK
  - Extern:
    - Gib einen Term: „n wird verdoppelt“, erwartete Antwort $2n$
- Eine konsequente interne Sicht: x *ist* eine Zahl
  - Aus dieser Sicht ist ein internes Verständnis von Änderungen unmöglich: Wenn a eine Zahl ist, kann a sich nicht ändern.
- In der Tat: Einige Schüler schrieben:
  - „Zahlen können sich nicht ändern.“, „Dann müsste sich 2 ändern. Das geht nicht“

Ein theoretisches Modell

- Zwei Sichtweisen der Variablen
- Meta-Level-Algebra (MLA)
  – Buchstaben nur Platzhalter, bedeutungsvoll erst nach Ersetzen
  – Sichtweise der mathematischen Logik
- Objekt-Level-Algebra (OLA)
  – Variablen als eigene Objekte mit Attributen (zB Definitionsmenge, aktueller Wert)

Ein theoretisches Modell

MLA

- $x \in M$: x steht für ein Element aus M
- Arithmetik
- Programmiersprache

OLA

- $x \in M$: M enthält x, nicht den Wert von x, oder: Der aktuelle Wert von x ist aus M
- Symbolische Algebra
- CAS

Es gibt Übergänge zwischen MLA und OLA:

- Sobald die Objekte so gut verstanden sind, dass sie einen eigenen Gegenstandsbereich bilden, kann man auf sie mit ML-Variablen verweisen
- Beispiel: in (x-1)|p ist x ein Objekt des Gegenstandsbereichs $\mathbb{Z}$[x] und p ist eine ML-Variable, die auf ein Polynom aus $\mathbb{Z}$ [x] verweist

Ein theoretisches Modell

- Beziehung zur Interpretation von Änderungen:
  - MLA: Änderungen werden nur extern vollzogen
  - OLA: Der aktuelle Wert kann als ein Attribut des Objektes verstanden werden: Interne Vorstellung der Änderung
- Demnach (hypothetisch):
  - Externes Verständnis deutet auf MLA hin
  - MLA ist letztlich die Fassung fertiger Mathematik
  - Also plausibel, dass Schüler/innen mit dieser Sicht insgesamt gute Leistungen erbringen

Einige Schlussfolgerungen

- OLA und MLA können unterschiedliche Funktionen im Verständnis insbesondere der Analysis erfüllen:
  - OLA ermöglicht es, eine Variable als eine Größe zu sehen (zB Temperatur T (eigentlich Funktion der Zeit)): Dynamische Vorstellungen
  - MLA erleichtert durch die Trennung der Objekte von ihrer Beschreibung die Formalisierung: Statische Vorstellungen
- Modellbildungen und physikalische Anwendungen gut mit OLA
- Übliche mengentheoretische Analysis nach Weierstraß eher mit MLA verständlich, bspw. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ stellt eine Anwendung externer Änderung dar
- Damit ist eine gewisse Klärung der Beobachtung erreicht.
- Ende des Exkurses

Vorläufige Zusammenfassung

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

- Mathematische Gesamtstruktur scheint weniger nach Themengebieten denn nach kognitiven Operationen strukturiert zu sein
- Syntaktische und semantische Aspekte sind weitgehend getrennt
- Substitutionsitems bilden offensichtlich eine für die Algebra zentrale Fähigkeit ab
- Das Verständnis einer Variable als Platzhalter und als Veränderliche ist zentral, aber auch komplex durch verschiedene Sichtweisen: OLA und MLA
- Funktionen und Gleichungen scheinen (im Lösungsverhalten der SuS) weniger verwandt als gemeinhin angenommen
- Warnung: All diese Aussagen sollten weiter geprüft werden
- Einige der Fragen können mit den Smart-Tests untersucht werden

…

Smart-Algebratest

- Kaye Stacey: Online-Tests zu Arithmetik und Algebra
  - Freiwilliges Angebot für Schulen
  - Online-Fragebogen: Leider viele nicht bearbeitete Items
  - Ideen ähnlich wie beim Chelsea-Test
  - Test auf bestimmte Fehlvorstellungen
- Auswertung mit Statistical Implicative Analysis
  - SEM wegen der Skalenqualität nicht anwendbar

Smart-Algebratest

- Beispielitems (506: Arithmetik)

Choose whether each statement is true or false.

$\frac{12\times 17}{6\times 17}=2$	$\frac{15\times 100}{5\times 100}=300$
$5\times 917=5^{917}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{40}=\frac{2}{70}$
$\frac{6}{73}+\frac{5}{73}=\frac{11}{73}$	$3\times(2\times 5)=6\times 15$
$92-43=43-92$	$2\times(300+7)=600+14$
$\frac{300+6}{3}=100+2$	$\frac{17000-17}{17}=1000-17$

TRUE
FALSE

Smart-Algebratest

- Beispielitems (479: Umformende Algebra)

Choose whether each statement is true or false.

$\frac{33x}{11x} = 3$	TRUE / FALSE	$\frac{18x}{6x} = 3x$	
$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3+y}$		$5m = m^5$	
$5 \times (3x + y) = 15x + 5y$		$\frac{s}{t} + \frac{p}{t} = \frac{s+p}{t}$	
$4a(5b - 9) = 20ab - 9$		$3 \times (a \times 2b) = 3a \times 6b$	
$\frac{6x - 5}{2} = 3x - 5$		$8d - 3g = 3g - 8d$	

Smart-Algebratest

- Beispielitems (497, 490 und 495)

1

Marks: --/1

David is 10 cm taller than Con.
Con is *h* cm tall.
We write David's height in algebra as:

Choose one answer.

○	$10+h$
○	$10h$
○	r
○	$C = D + 10$
○	$h10$
○	18

1

Marks: --/1

Sue weighs 1 kg less than Chris.
Chris weighs *y* kg.
We write Sue's weight in algebra as:

Choose one answer.

○	a.	$y - 1$
○	b.	x
○	c.	$1 - y$
○	d.	24
○	e.	$1y$
○	f.	90

1

Marks: --/1

Sam is *s* cm shorter than Eva.
Eva is 95 cm tall.
We can write Sam's height in algebra as:

Choose one answer.

○	a.	$95 - s$
○	b.	$95s$
○	c.	$s - 95$
○	d.	s
○	e.	94
○	f.	$-s95$

Smart-Algebratest

- Beispielitems (575, 577 und 498)

1
Marks: --/1

p stands for an unknown number.

Write in mathematical symbols:

'Multiply ***p*** by 6, then add 10 to the result'

A	$p \times 6 = x + 10$
B	$(p+6)^{10}$
C	$6p10$
D	$6p+10$
E	$p \times (6+10)$
F	$16p$
G	$p16$

Select from the answers:

1
Marks: --/1

n stands for an unknown number.
Write in mathematical symbols:
'Add 5 to *n*, then multiply the result by 3'

A	$n + 5 \times 3$
B	$15n$
C	$5 + n \times 3$
D	$n + 5 = x \times 3$
E	$(n+5)^3$
F	$3(n+5)$

Select from the answers:

1
Marks: --/3

Some students had to find some values of x to make this equation true:
x + x + x = 12
Mark the work of each student.

Mary wrote x = 2, x = 5 and x = 5

Millie wrote x = 9, x = 2 and x = 1

Mandy wrote x = 4

Smart-Algebratest

- Beispielitems (491, 494 und 581)

1 For my garden, I bought ***r*** roses and ***g*** geraniums.
The roses cost \$4 each.
The geraniums cost \$5 each.
Choose the equation that says that the total cost was \$70.

Choose one answer.

- a. $r + g = 70$
- b. $4r + 5g = 70$
- c. $10r + 6g = 70$

At a bike shop there are ***b*** bikes (2 wheels each) and ***t*** trikes (3 wheels each).
Choose the equation that says that there are a total of 100 wheels.

Choose one answer.

- a. $b + t = 100$
- b. $2b + 3t = 100$
- c. $35b + 10t = 100$

The cost of hiring a bicycle is made up of a fixed fee of \$25 and a usage charge of \$8 per hour.

Which way would your teacher prefer to see the rule for this cost written?

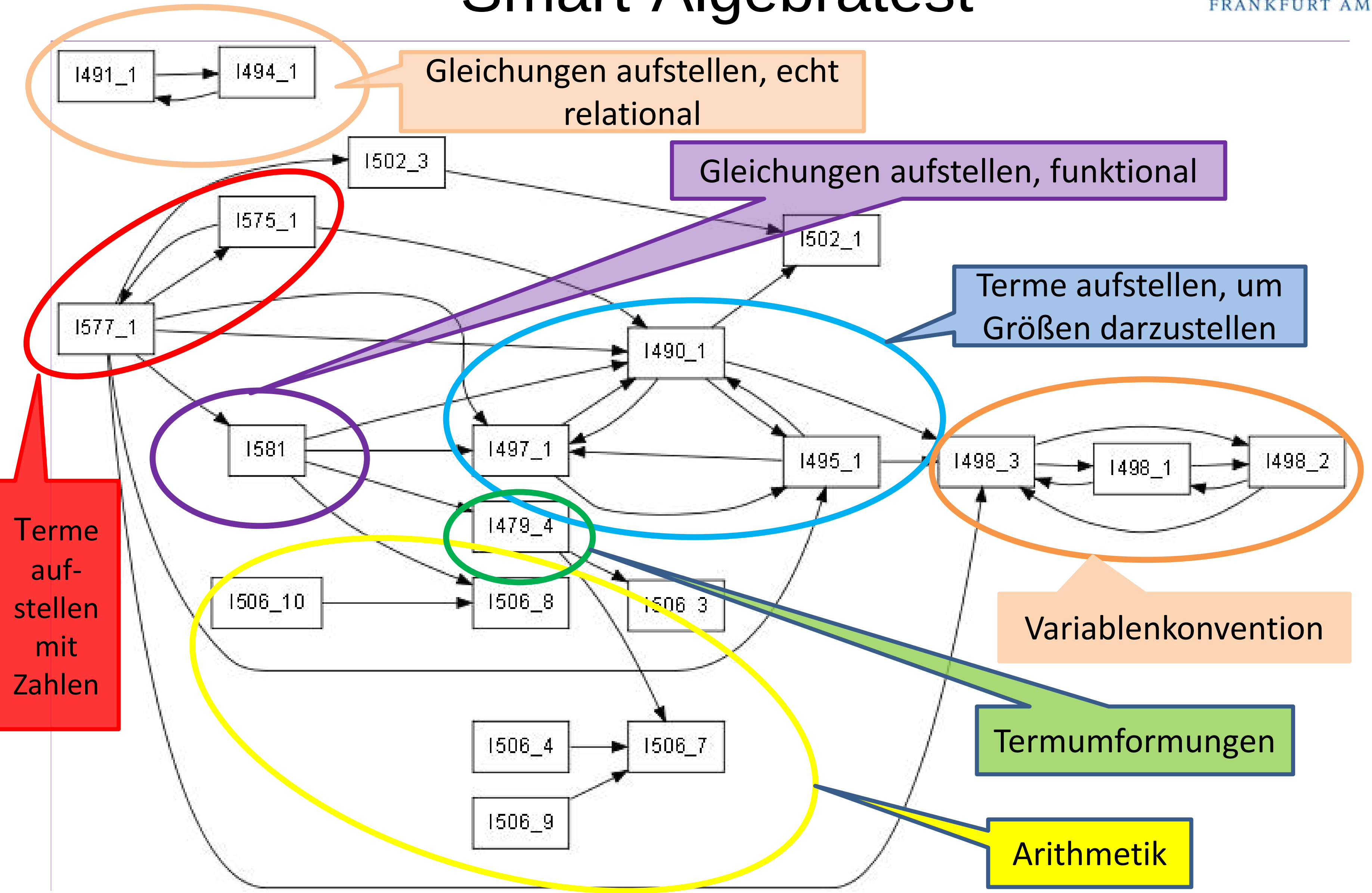
Choose one answer.

- a. $25C + 8t$ where the ***C*** is the fixed fee and ***t*** is the time used in hours
- b. $8t + 25$ where ***t*** is the number of hours used
- c. $C = 25 + 8t$ where ***C*** is the total hiring cost in dollars and ***t*** is the number of hours used
- d. $C = 25 + h = 8t$ where ***C*** is the total hiring cost in dollars, ***h*** is the hiring charge and ***t*** is the number of hours used
- e. $C + 8t$ where the ***C*** dollars is the fixed fee to hire a bike in dollars and ***t*** is the time used in hours

Smart-Algebratest

Was ergibt sich, wenn man die Daten dieses Tests ohne weitere Hypothesenformulierung mit Statistical Implicative Analysis auswertet?

Smart-Algebratest



Smart-Algebratest

- Algebraische Kompetenz ist inhaltlich klar interpretierbar strukturiert
- Wer Arithmetik beherrscht, ist nicht notwendig gut in inhaltlicher Algebra (Bestätigung der aus TIMSS abgeleiteten Ergebnisse)
- Termumformungen haben relativ wenig mit dem inhaltlichen Verständnis zu tun (Bestätigung der Algebratest-Ergebnisse)
- Es ist ein wesentlicher Unterschied, ob Gleichungen funktional (C=25+8t) oder relational (3x+4y=12) verstanden werden (Bestätigung der Algebratest-Ergebnisse)
- Wer die Konventionen zur Variablenverwendung nicht beherrscht, kann auch nicht gut mit Algebra modellieren

Einige Empfehlungen für den Unterricht

- Langfristiges Ziel didaktischer Forschung sollte die Verbesserung von Unterricht sein.
  - Deswegen hier eine – wenn auch spekulative – Empfehlungen:
- Algebra sollte vernetzt mit ihren Anwendungen unterrichtet werden
- Inhaltliche und syntaktische Fähigkeiten müssen beide geschult und aufeinander bezogen werden
- Substitutionen sollten nicht vernachlässigt werden [Malle]
- SuS müssen Variablen selbst einführen!
  - Evtl. sogar Einstieg in die Algebra über das Benennen von Objekten!
- Algebra als Modellierungsmittel liefert besonders beziehungsreiche Situationen

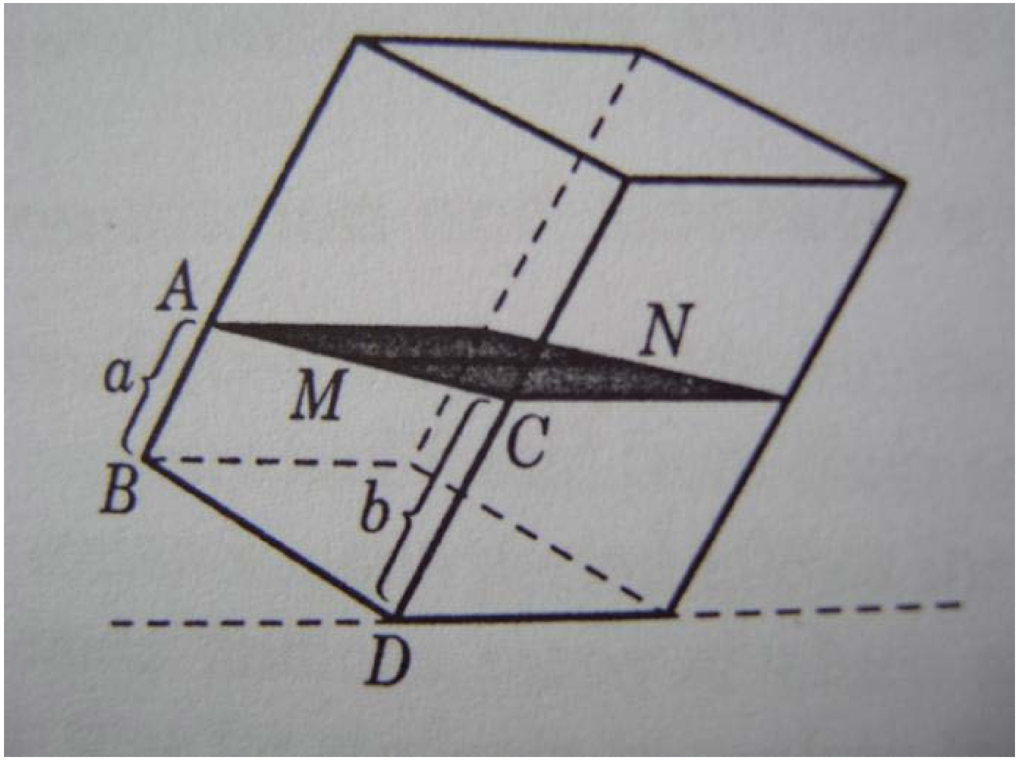
Perspektiven

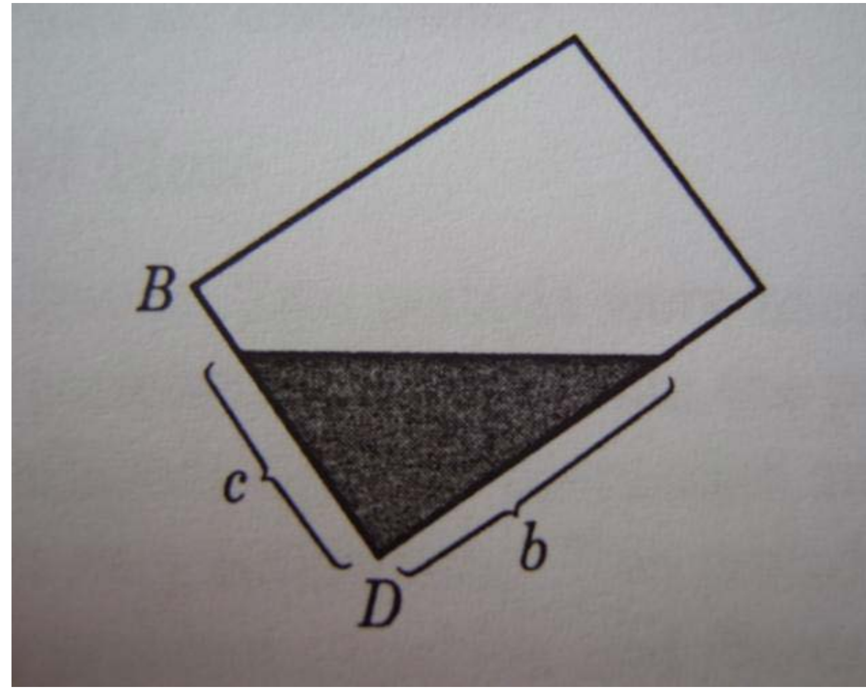
- Diagnose auf Meso-Ebene
  - Mikroskopische detaillierte Schülerfehleranalysen auf Basis des Kognitivismus ist nur als Forschungsprojekt leistbar, sonst nicht
  - Problematisch: Makroskopische Diagnose (Modellbildungskompetenz)
  - Mittelweg: Bereichsübergreifende Kognitive Strategien (zB Beziehungen mit Unbekannten aufstellen), Grundvorstellungen und Mathematisierungsmuster diagnostizieren
- Vergleich von Algebradiagnose durch (Online)-Fragebogen und Leitfadeninterview
- Erkenntnisse werden verwendet in Entwicklungsprojekten
  - Experimente im MU
  - FeliX1D, 2D: Vernetzung zur Geometrie
  - Applets zu Bildbearbeitung und Tongenerierung
- Je nach Zeit noch einige Beispiele:

Größen

- Es zeigt sich, dass die Sichtweise Interpretation von Variablen Größen wichtig ist
  - Denn: Wichtige Stellung von geometrischen Items im Test
  - Geometrische Kontexte sind eng mit dem Rest der semantischen Algebra verwand
  - Änderungsprozesse sind bei Größen gut verständlich
  - Größen erlauben die inhaltliche Deutung vieler Operationen
- Sandra Gerhard: Gute Erfahrungen mit einem modifizierten MeasureUp-Programm, in dem Variablen über Größen eingeführt werden
- Roman Lange (Wiss. HA, PH HD): Erprobung des „Water-Flask-Problems“ aus Becker/Shimada „The open-ended approach“

The Water-Flask-Problem





Erkenntnis: Schüler (Klasse 8 Realschule) können anhand dieses Experimentes in das Themenfeld “lineare Gleichungen“ erfolgreich einsteigen und auch äquivalente Formen im Kontext deuten. Signifikanter Leistungszuwachs in Standardalgebraaufgaben im Vergleich zu einer Kontrollgruppe, die parallel lineare Funktionen behandelte

The Water-Flask-Problem

Erkenntnis: Schüler (Klasse 8 Realschule) können anhand dieses Experimentes in das Themenfeld “lineare Gleichungen“ erfolgreich einsteigen und auch äquivalente Formen im Kontext deuten. Signifikanter Leistungszuwachs in Standardalgebraaufgaben im Vergleich zu einer Kontrollgruppe, die parallel lineare Funktionen behandelte

FeliX1D Relationen zwischen Variablen

- Zitat von Folie 34: „ Es ist ein wesentlicher Unterschied, ob Gleichungen funktional (C=25+8t) oder relational (3x+4y=12) verstanden"
- Explorationen von Beziehungen zwischen Größen sind mit Computerhilfe möglich: Projekt FeliX1D

FeliX1D: Relationen zwischen Variablen

- Wirkung von Gleichungen und Ungleichungen mit der Maus erfahrbar
- Alle Eigenschaften werden algebraisch kodiert
  - Es gibt keine Geheimnisse
- Unerfüllbare Gleichungen: Defekte
- Variablenaspekte (Malle, Küchemann) werden erfahrbar:
  - Variable als Veränderliche: Wert durch Ziehen willkürlich veränderbar, bzw. unterliegt mittelbarer Änderung
  - Variable als Unbekannte: Variable wird durch Gleichung festgelegt
  - Variable als Platzhalter (Einsetzungsaspekt): Bei Termen Berechnung des Defekts
  - Variable als Kalkülelement: Gleichung umformen, Wirkung bleibt unverändert

FeliX1D: Relationen zwischen Variablen

- Ebenso können verschiedene Bedeutungen von Gleichungen erfahren werden
  - Bestimmungsgleichung: Siehe: Variable als Unbekannte
  - Funktionsgleichung: Beispiel $A=B^2$
  - Dabei: Immer Umkehrfunktion miterfasst!
  - Beziehungsgleichung: Es gilt immer eine bestimmte Beziehung zwischen Größen, z.B. $A+B=1$.
  - Identität: Identitäten können hinzugefügt werden, ohne dass sich am Zugverhalten etwas ändert
- Analog: Ungleichungen
- Brücke zwischen MLA und OLA

FeliX1D: Relationen zwischen Variablen

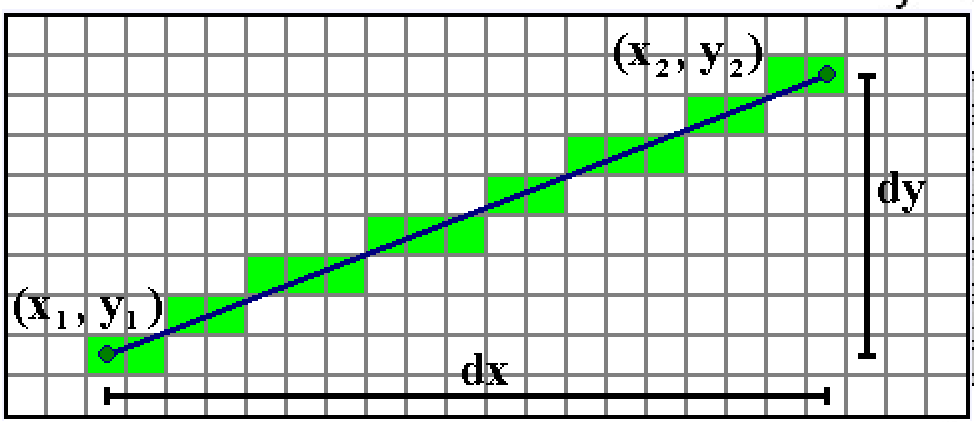
- Zwei kleine Untersuchungen dazu (Staatsexamensarbeiten)
- Schmitt (2008): 49 Schüler, 9.Klassen Gymnasium
  - Experimental- und Kontrollgruppe
  - Vortest und Nachtest zu allgemeinem algebraischen Niveau
    - Beispiel: Kann man sagen, was größer ist, n^2 oder 6n?
- Knapp 2 Wochen Aufgaben mit FeliX1D
  - Mittelpunkt, 1:2-Teilungspunkt; Textaufgaben; Dynagraph-Untersuchung von quadratischen Funktionen
- Ergebnis: Signifikante Verbesserungen ($p=0.02$; t-Test); mittelstarker Effekt
- Kube (2008): 22 Schüler einer Hauptschule
- Aufgaben mit FeliX1D
  - Erklärung des Zugverhaltens, zB gib ein 10+m=j und erkläre; ändere dann zu 10=j-m
  - Textaufgaben; Wachstumsverhalten vergleichen $y=x^2$, $y=-x^2$, $-y=x^2$.
- Ergebnis: Signifikante Verbesserungen ($p=0.04$; t-Test); mittelstarker Effekt

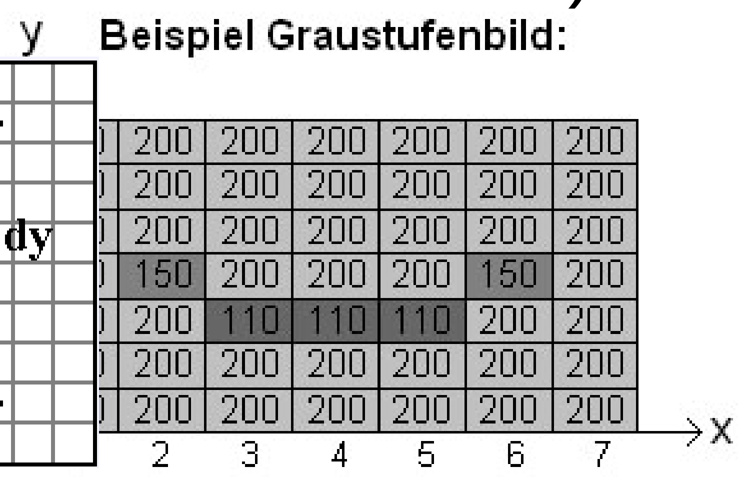
Geometrie und Algebra der digitalen Bilder

- Wozu ist Algebra gut?
- Diese Frage muss auf jeder Altersstufe neu beantwortet werden
- Hier: Ende Sek I
- Digitalkameras, WebCams, Handykameras sind Bestandteil der Lebenswelt der Schüler
- Ziele
  - Verstehen der Rolle der Mathematik
  - Gestalten mit Hilfe von Mathematik
  - Bewerten – auch da kann Mathematik helfen

Geometrie und Algebra der digitalen Bilder

- Binsenweisheit: Computer stellen alles durch Zahlen dar
- Helligkeit: z. B. Zahlen 0 (schwarz) …. 255 (weiß)
- Graustufenbilder sind Matrizen (Koordinatensystem; Malen nach Zahlen)





2	3	4	5	6	7
200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200
150	200	200	200	150	200
200	110	110	110	200	200
200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200

Bildbearbeitung mit Gimp

- Bildbearbeitungsprogramme sollte man nicht nur benutzen, sondern mit dem „mathematischen Blick“ betrachten
- Gut geeignet: Freeware Gimp (www.gimp.org) oder kommerzielle Programme wie Photoshop, etc.
- Mathematische Aspekte daran:
  – Geometrische Bildtransformation
  – Helligkeits-Statistik: Helligkeit=Mittelwert, Kontrast=Standardabweichung
  – Helligkeitsänderung mit Funktionen
- Noch deutlicher wird die Rolle der Mathematik, wenn man sie nicht nur hineinsehen muss…

Bildbearbeitung mit Applets

- Veränderung der Pixelhelligkeit durch Anwenden einer Funktion: Ausprobieren mit Applet
- Mögliche Aufträge zum Ein-Pixel-Applet:
  – Helligkeit erhöhen, verringern
  – Kontrast erhöhen, verringern
  – Negativbilder
  – SW-Bilder
  – Was bewirken (x-20)^4 oder 16*x^0,5 oder 255-10000/x ?
  – Ein Partner verändert Bild z.B. (255-x/2), der andere versucht, sie rückgängig zu machen (Umkehrfunktion)
- RGB-Farben

Bildbearbeitung mit Applets

- Geometrische Transformationen – Mögliche Aufträge dazu:
  - Verschieben
  - Vergrößern, verkleinern
  - Scheren
  - Spiegeln
  - Rotieren
  - Was bewirkt x‘=x, y‘=y+30*sin(y/20) ?
  - Was bewirkt x‘=x, y‘=x*y/100 – und warum?
  - Was bewirkt x‘=x+y/2, y‘=y+x/2 – und warum?
  - Was bewirkt
    x’=x+(x-160)*sqrt((x-160)^2+(y-160)^2)/300
    y’=y+(y-160)*sqrt((x-160)^2+(y-160)^2)/300 ?

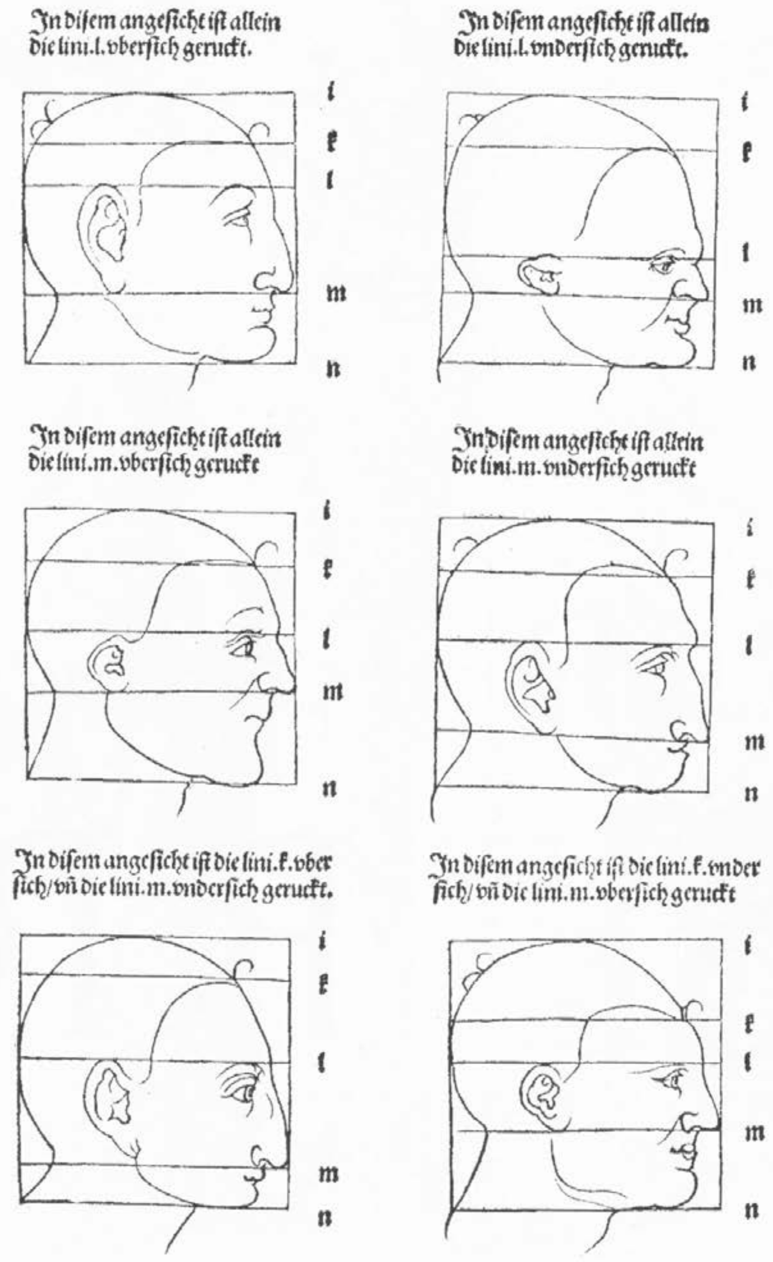


Abb. 5.3.24 Dürer 1528: Verschiedene Methoden der nichtlinearen, aber mathematisch beschreibbaren Verzerrung menschlicher Köpfe [Dürer 1528]

Gesamtfazit

- Strukturuntersuchungen können beitragen zur Aufklärung der bei Schülern realisierten Konzepte
- Diese müssen abgeglichen werden mit der fachlichen und didaktischen Struktur
- Optimistisches Fazit: Es gibt Fortschritte
- Pessimistisches Fazit: Nachsitzung

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

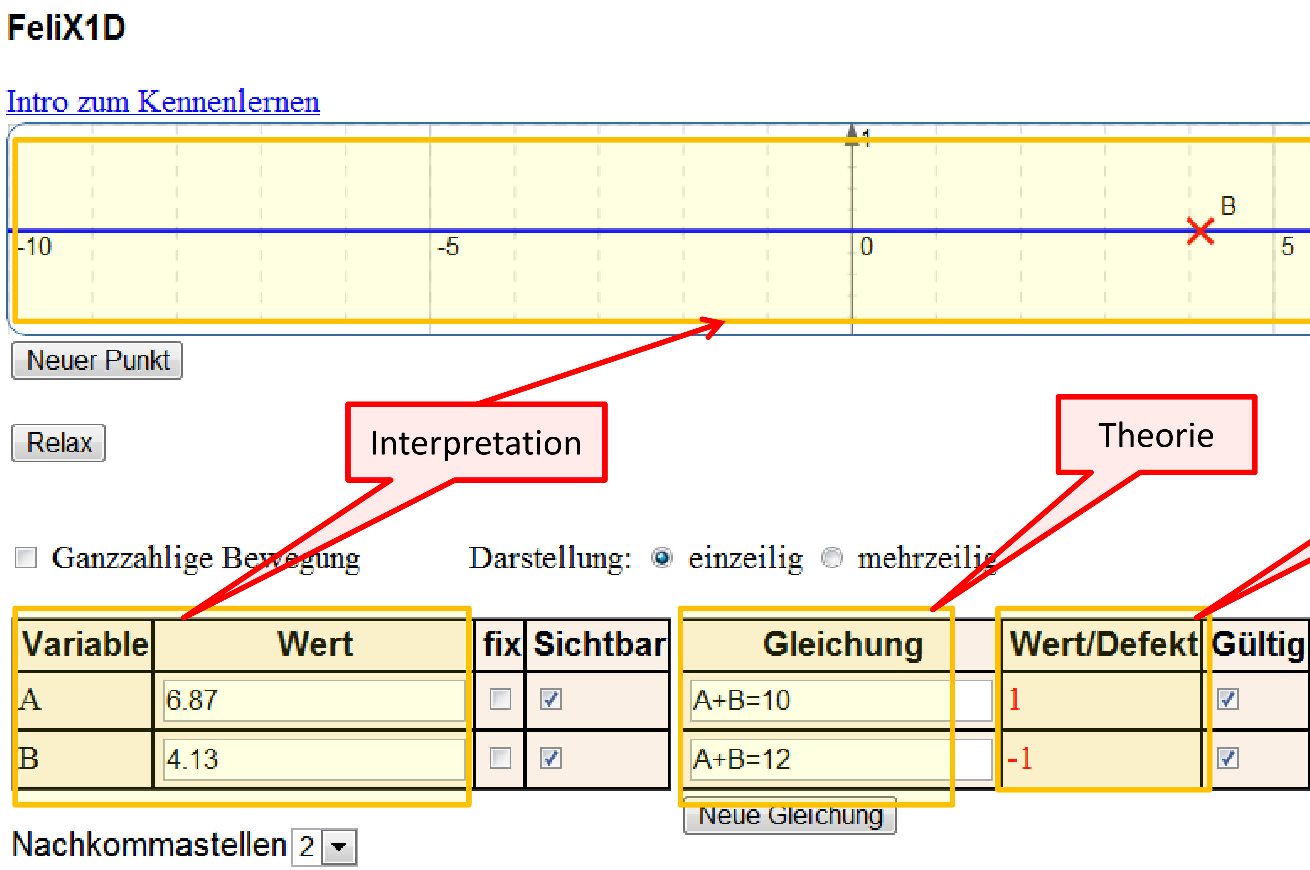
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Anhang 1: FeliX

FeliX

- FeliX ist ein langfristiges Forschung- und Entwicklungsprojekt zur Integration von Geometrie- und Algebrasoftware
  - Hypothese: FeliX kann bei der Integration verschiedener Vorstellungen zu Variablen helfen
- Zwei Varianten 1D und 2D: **Demo** der 1D-Browser-Variante
- Felix1D stützt MLA: Belegungstabelle, erschließt aber auch dynamische Änderungsverhalten eher im Sinne von OLA

FeliX



Es ist ein Zeichen für fachlich denkende Didaktik, wenn ein didaktisches Werkzeug für den Beginn der Sek I fachwissenschaftlich interpretiert werden kann

FeliX

- Änderung (MLA): Wechsel der Interpretation
  - FeliX versucht ein Modell zu finden: Gleichungen bleiben gewahrt: Zugmodus
- Änderung (OLA): Objekte ändern ihren aktuellen Wert
- Verständnis von Monotonie von funkt. Zushg.:
  - OLA: Änderungserfahrung durch Dynamik des Zugmodus
  - MLA: Änderungserfahrung innerhalb einer Interpretation (statisch): Wenn X1<X2 dann ist – und zwar in jedem Modell - Y1<Y2

  FeliX erlaubt beide Sichtweise zu integrieren
- Mögliche zukünftige Ergänzung um Differentiale
  - Mit jeder Variablen X wird eine zweite Variable dX erzeugt (nicht infinitesimal!)
  - Mit jeder Gleichung $g(X, Y, ...) = 0$ wird auch $\frac{\partial g}{\partial X} dX + \frac{\partial g}{\partial Y} dY + \ldots$=0 erzeugt
  - Das würde ermöglichen, auch im Sinne von MLA lineare Prognosen von Änderungen in einer Interpretation auszudrücken