Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben ME1, ME2, ME3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

Aufgabe ME1:

Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck $\hexagon ABCDEF$. Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden sich im Punkt S.

(a) Bestimme die Maße aller Innenwinkel im Dreieck $\triangle BCS$.

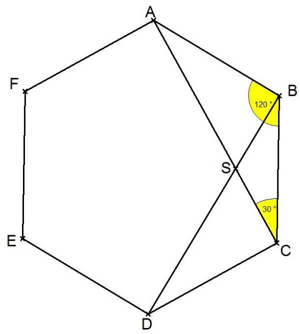
(b) Bestimme den Anteil der Fläche des Dreiecks $\triangle BCS$ an der Gesamtfläche des Sechecks $\hexagon ABCDEF$.

Die Antworten sind auch zu begründen.

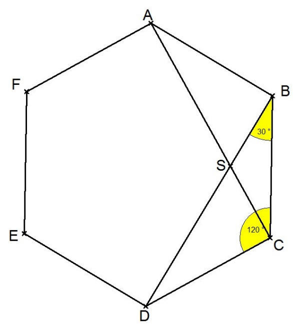
Lösungsvorschlag ME1:

(a) Der Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck beträgt 120°. Daher ist: $\angle ABC = 120°$

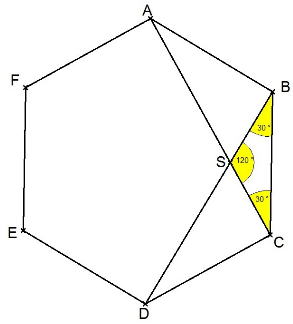
Da $\triangle ABC$ gleichschenklig ist, folgt: $\underbrace{\angle BCA}_{=\angle BCS} = \frac{180°-120°}{2} = 30°$



Völlig analog, folgt im $\triangle BCD$, dass $\angle BCD = 120°$ und dass: $\underbrace{\angle DBC}_{=\angle SBC} = \frac{180°-120°}{2} = 30°$



Im $\triangle BCS$ können wir nun folgern, dass: $\angle CSB = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$



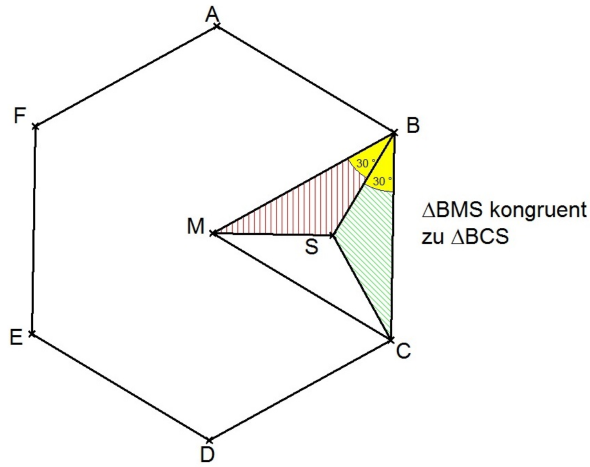
(b) Wir betrachten nun zusätzlich noch den Mittelpunkt M des Sechsecks.

Die Dreiecke $\triangle BCS$ und $\triangle BMS$ sind kongruent. Dies kann man wie folgt begründen:

1.) Die beiden Dreiecke haben eine gemeinsame Seite $\overline{BS}$.

2.) Es gilt $|\overline{MB}| = |\overline{BC}|$, denn das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichseitig (da es drei $60°$-Winkel hat).

3.) Es gilt: $\quad \angle MBS = \angle MBC - \angle SBC \overset{(a)}{=} 60° - 30° = 30° \overset{(a)}{=} \angle BCS$



Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die beiden Dreiecke also kongruent.

Analog kann man begründen, dass auch $\triangle CMS$ kongruent zu $\triangle BCS$ ist.

Somit folgt:

$$F(\triangle MCB) = F(\triangle CMS) + F(\triangle BMS) + F(\triangle BCS) = 3 \cdot F(\triangle BCS)$$
$$\Rightarrow \quad F(\triangle BCS) = \frac{1}{3} \cdot F(\triangle MCB)$$

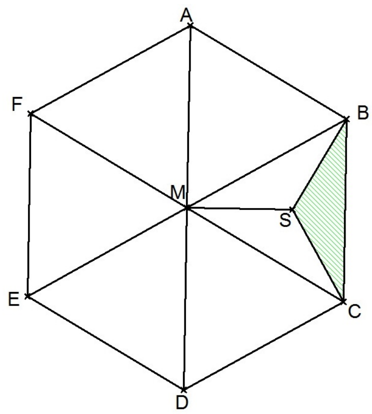
Weiterhin sind die Dreiecke

$$\triangle ABM \quad , \quad \triangle BCM \quad , \quad \triangle CDM \quad , \quad \triangle DEM \quad , \quad \triangle EFM \quad , \quad \triangle FAM$$

alle (gleichseitig mit gleicher Seitenlänge und somit) kongruent. Sie setzen sich zu dem Sechseck $\hexagon ABCDEF$ zusammen und damit gilt:

$$F(\triangle \hexagon ABCDEF) = \begin{pmatrix} & F(\triangle ABM) & + & F(\triangle BCM) & + & F(\triangle CDM) \\ + & F(\triangle DEM) & + & F(\triangle EFM) & + & F(\triangle FAM) \end{pmatrix} = 6 \cdot F(\triangle BCM)$$

$$\Rightarrow \quad F(\triangle BCM) = \frac{1}{6} \cdot F(\hexagon ABCDEF)$$



Zusammen folgt:

$$F(\triangle BCS) = \frac{1}{3} \cdot F(\triangle BCM) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot F(\hexagon ABCDEF) = \frac{1}{18} \cdot F(\hexagon ABCDEF)$$

Aufgabe ME2:

(a) Auf wieviele Nullen endet die Zahl:

$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$ (Man nennt diese Zahl auch **Fakultät von 11**.)

(b) Auf wieviele Nullen endet die Zahl:

$b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101$ (Man nennt diese Zahl auch **Fakultät von 101**.)

Es sollte nachvollziehbar sein, wie du zu den Ergebnissen gekommen bist.

Lösungsvorschlag ME2:

(a) Der Primfaktor 5 ist genau 2-mal in a enthalten, denn er kommt in den Zahlen 5 und 10 jeweils einmal vor. (Zweimal kommt die 5 in keiner der Zahlen $1, \ldots, 11$ vor, da $5^2 = 25 > 11$ ist.)

Der Primfaktor 2 kommt deutlich häufiger in a vor, da er ja in jeder der 5 geraden Zahlen $2, 4, 6, 8, 10$ mindestens einmal vorkommt.

Somit endet b auf genau 2 Nullen.

(b) Der Primfaktor 5 ist genau 24-mal in b enthalten, denn er kommt in den Zahlen

$$\underbrace{5\ ,\ 10\ ,\ 15\ ,\ \ldots\ ,\ 90\ ,\ 95\ ,\ 100}_{\text{20 Zahlen}}$$

mindestens einmal vor und in den vier Zahlen $25, 50, 75$ und 100 ein noch ein zweites Mal. (Dreimal kommt die 5 in keiner der Zahlen $1, \ldots, 101$ vor, da $5^3 = 125 > 101$ ist.)

Der Primfaktor 2 kommt deutlich häufiger in b vor, da er ja in jeder der 50 geraden Zahlen $2, 4, \ldots, 100$ mindestens einmal vorkommt.

Somit endet b auf genau 24 Nullen.

Aufgabe ME3:
In einer Lostrommel befinden sich weiße und schwarze Kugeln. Wenn man 6 weiße und 6 schwarze Kugeln hinzufügt, verdoppelt sich der Anteil der weißen Kugeln in der Lostrommel.

Wieviele weiße und schwarze Kugeln könnten sich (vor dem Hinzufügen der Kugeln) in der Lostrommel befinden? Bestimme alle Möglichkeiten.

Begründe auch, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast.

Lösungsvorschlag ME3:
Sei x die Zahl der weißen und y die Zahl der schwarzen Kugeln in der Lostrommel zu Beginn. Dann ist der Anteil der weißen Kugeln

- zu Beginn: $\frac{x}{x+y}$
- nach dem Hinuzufügen: $\frac{x+6}{x+y+12}$

Also gilt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{x+6}{x+y+12} &\overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} 2x(x+y+12) = (x+y)\cdot(x+6) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 24x = x^2 + 6x + yx + 6y \\ &\Leftrightarrow x^2 + 18x = -xy + 6y \\ &\Leftrightarrow x \cdot (x+18) = (6-x) \cdot y \\ &\overset{x \neq 6}{\Leftrightarrow} \frac{x \cdot (x+18)}{6-x} = y \end{aligned}$$

Man erkennt, dass $x \in \{1,2,3,4,5\}$ sein muss.

Im Fall $x = 6$ ist die letzte Umformung nicht korrekt, aber man sieht das die Gleichung $x\cdot(x+18) = (6-x)\cdot y$ im Fall $x = 6$ nicht lösbar sein kann.

Für $x > 6$ würde man aus $y = \frac{x\cdot(x+18)}{6-x}$ eine negative Zahl für y erhalten.

Wir versuchen nun die verschiedenen denkbaren Werte für x:

$$\begin{array}{lllllllll} x & = & 1 & \Rightarrow & y & = & \frac{1\cdot 19}{5} & = & \frac{19}{5} \notin \mathbb{N} \quad \text{NICHT MÖGLICH} \\ x & = & 2 & \Rightarrow & y & = & \frac{2\cdot 20}{4} & = & 10 \\ x & = & 3 & \Rightarrow & y & = & \frac{3\cdot 21}{3} & = & 21 \\ x & = & 4 & \Rightarrow & y & = & \frac{4\cdot 22}{2} & = & 44 \\ x & = & 5 & \Rightarrow & y & = & \frac{5\cdot 23}{1} & = & 105 \end{array}$$

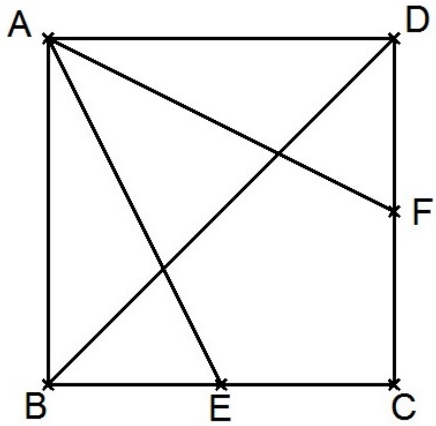
Sämtliche Lösungen sind also:

$$(x/y) = (2/10) \quad , \quad (x/y) = (3/21) \quad , \quad (x/y) = (4/44) \quad , \quad (x/y) = (5/105)$$

Aufgabe MG1:

In einem Quadrat $\square ABCD$ mit Seitenlänge 1 verbinden wir den Punkt A mit den Mittelpunkten E und F der gegenüberliegenden Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$. Außerdem zeichen wir die Diagonale $\overline{BD}$ ein.

Dadurch wird das Quadrat in 6 Teilflächen zerlegt.



Bestimmt den Flächeninhalt aller dieser Teilflächen.

Es sollte nachvollziehbar sein, wie ihr zu den Ergebnissen gekommen seid.

Lösungsvorschlag MG1:

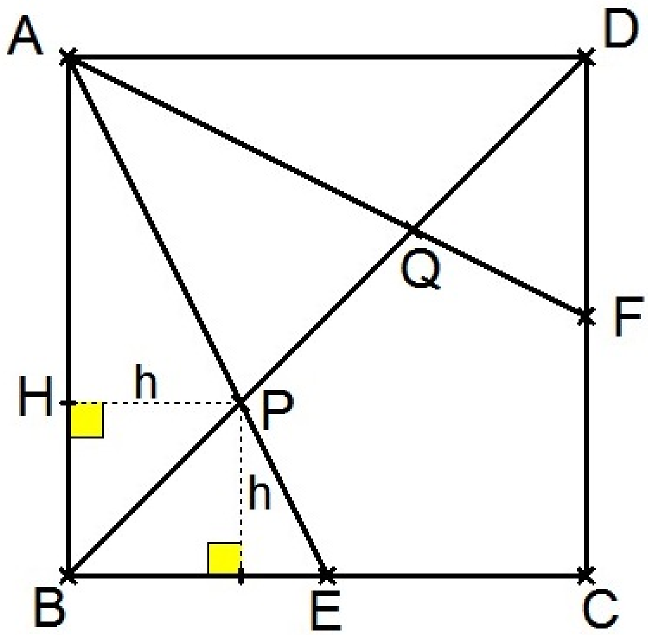
Wir bezeichnen

- den Schnittpunkt von $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$ mit P
- den Schnittpunkt von $\overline{AF}$ und $\overline{BD}$ mit Q

Da P auf der Diagonalen $\overline{BD}$ liegt, sind die Höhen

auf die Seite $\overline{BD}$ im Dreieck $\triangle EPB$
und auf die Seite $\overline{AB}$ im Dreieck $\triangle BPA$

gleich lang, wir bezeichnen die Länge dieser Höhe mit h.



Außerdem sei H der Fußpunkt der Höhe auf die Seite $\overline{AB}$ im Dreieck $\triangle BPA$.

Mit dem Strahlensatz können wir nun die Länge von h bestimmen, es gilt:

$$\frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{HP}|}{|\overline{BE}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-h}{1} = \frac{h}{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad 1-h = 2h \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{3}$$

Damit ergibt sich:

- der Flächeninhalt von $\triangle BPA$:

$$F_{\triangle BPA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- der Flächeninhalt von $\triangle EPB$:

$$F_{\triangle EPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Analog (bzw. aus Symmetriegründen) ergibt sich:

- der Flächeninhalt von $\triangle DQA$:

$$F_{\triangle DQA} = \frac{1}{6}$$

- der Flächeninhalt von $\triangle FQD$:

$$F_{\triangle FQD} = \frac{1}{12}$$

Weiterhin gilt:

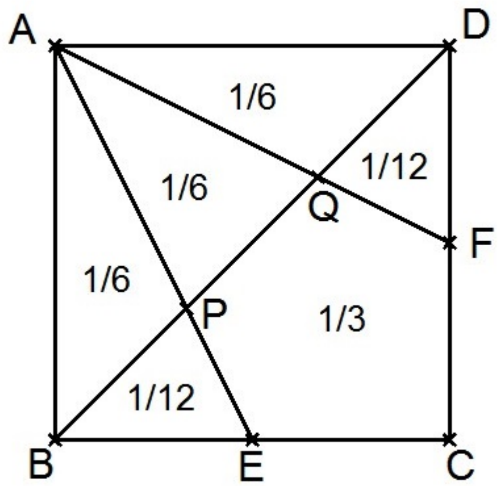
- Es ist $F_{\triangle BAD} = \frac{1}{2}$ und folglich:

$$F_{\triangle PAQ} = F_{\triangle BAD} - F_{\triangle BPA} - F_{\triangle DQA} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

- Es ist $F_{\triangle DCB} = \frac{1}{2}$ und folglich:

$$F_{\pentagon CEPQF} = F_{\triangle DCB} - F_{\triangle EPB} - F_{\triangle FQD} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Ergebnis:



Aufgabe MG2:

Armin und Birgit laufen um einen kleinen See herum. Armin benötigt 12 Minuten für eine Runde, Birgit benötigt 15 Minuten. (Beide laufen mit konstanter Geschwindigkeit.) Beide starten zur gleichen Zeit am selben Startpunkt und laufen in unterschiedlichen Richtungen los.

(a) Nach welcher Zeit begegnen sich die beiden?

(b) Nach welcher Zeit begegnen sich die beiden, wenn Armin unmittelbar nach dem Start noch 1 Minute stehen bleibt, um seine Schuhe zu binden und dann erst losläuft?

Es sollte nachvollziehbar sein, wie ihr zu den Ergebnissen gekommen seid.

Lösungsvorschlag MG2:

Sei ℓ die Länge der Laufstrecke. Dann gilt für die Geschwindigkeiten v_A von Armin und v_B von Birgit: $v_A = \frac{\ell}{12\text{min}}$ und $v_B = \frac{\ell}{15\text{min}}$

(a) Zu dem Zeitpunkt t, an dem sich beide begegnen, haben sie zusammen exakt die Strecke ℓ zurückgelegt, es gilt also:

$$\ell = \underbrace{v_A \cdot t}_{\text{von Armin zurückgelegt}} + \underbrace{v_B \cdot t}_{\text{von Birgit zurückgelegt}} = (v_A + v_B) \cdot t = \left(\frac{\ell}{12\text{min}} + \frac{\ell}{15\text{min}}\right) \cdot t = \frac{\ell}{\left(\frac{20}{3} \cdot \text{min}\right)} \cdot t$$

$\Big[$Man beachte dabei, dass: $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{5}{60} + \frac{4}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = \frac{1}{\left(\frac{20}{3}\right)}\Big]$

Folglich ist: $t = \frac{20}{3}\text{min}$

Die beiden begegnen sich also nach $\frac{20}{3}$min, dies entspricht 6 Minuten und 40 Sekunden.

(b) Zu dem Zeitpunkt t^*, an dem sich beide begegnen, haben sie zusammen exakt die Strecke ℓ zurückgelegt, es gilt also:

$$\begin{aligned}
\ell &= \underbrace{v_A \cdot (t^* - 1\text{min})}_{\text{von Armin zurückgelegt}} + \underbrace{v_B \cdot t^*}_{\text{von Birgit zurückgelegt}} \\
&= (v_A + v_B) \cdot t^* - v_A \cdot 1\text{min} \\
&= \left(\frac{\ell}{12\text{min}} + \frac{\ell}{15\text{min}}\right) \cdot t^* - \frac{\ell}{12\text{min}} \cdot 1\,\text{min} \\
&\overset{[\text{siehe (a)}]}{=} \frac{\ell}{\left(\frac{20}{3} \cdot \text{min}\right)} \cdot t^* - \frac{\ell}{12}
\end{aligned}$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man:

$$\Rightarrow \quad \frac{13}{12} \cdot \ell = \frac{\ell}{\left(\frac{20}{3} \cdot \text{min}\right)} \cdot t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{20}{3} \cdot \frac{13}{12}\text{min} = \frac{65}{9}\text{min}$$

Die beiden begegnen sich also nach $\frac{65}{9}$min, dies entspricht 7 Minuten und $13,\overline{3}$ Sekunden.

Aufgabe MG3:

(a) An welchem Tag haben wir (ab heute) zum nächsten Mal ein Datum, dass aus 8 verschiedenen Ziffern besteht?

(b) An welchem Tag hatten wir (bis heute) zum letzten Mal ein Datum, dass aus 8 verschiedenen Ziffern besteht?

Dabei soll das Datum mit jeweils 2 Ziffern für Tag und Monat (ggf. mit einer vorgestellten 0) und 4 Ziffern für das Jahr angegeben werden. Das heutige Datum würde zum Beispiel so dargestellt:

1	5		0	3		2	0	1	6
Tag			Monat			Jahr			

Die korrekten Lösungen genügen. Begründungen sind bei dieser Aufgabe nicht erforderlich.

Lösungsvorschlag MG3:

(a)

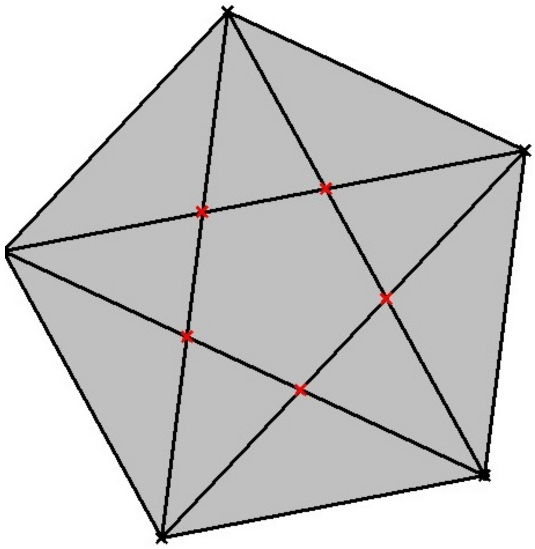
1	7		0	6		2	3	4	5
Tag			Monat			Jahr			

(b)

2	5		0	6		1	9	8	7
Tag			Monat			Jahr			

Aufgabe MG4:

Verbindet man in einem regelmäßigen 5-Eck jede Ecke mit jeder anderen durch eine Strecke, so erhält man die folgende Figur:



Wie man sieht, entstehen genau 5 Schnittpunkte im Inneren des 5-Ecks.

Wieviele Schnittpunkte entstehen im Inneren eines regelmäßigen 7-Ecks, wenn man auch hier jede Ecke mit jeder anderen durch eine Strecke verbindet?

Es sollte nachvollziehbar sein, wie ihr zu dem Ergebnis gekommen seid.

Anmerkung zur Lösung MG4:
Es spielt für das Ergebnis keine Rolle, dass das Siebeneck regelmäßig ist. Wichtig ist nur, dass das Siebeneck konvex ist (d.h. dass sich alle Verbindungsstrecken im Inneren des Siebenecks befinden) und dass sich niemals 3 oder mehr Strecken in einem Punkt schneiden.

Lösungsvorschlag MG4 (1):
Wir betrachten die Strecken im Inneren des 7-Ecks. Hierbei handelt es sich um Strecken, deren Endpunkte (Ecken des 7-Ecks)

- entweder über 2 Kanten miteinander verbunden sind (eine solche Strecke nennen wir kurz **Zwei-Kanten-Strecke**),
- oder über 3 Kanten miteinander verbunden sind (eine solche Strecke nennen wir kurz **Drei-Kanten-Strecke**).

Sind zwei Ecken über 4 Kanten verbunden, so sind sie auch (im entgegengesetzten Drehsinn) über 3 Kanten verbunden. Ecken die über 5 Kanten verbunden sind, sind entsprechend auch über 2 Kanten verbunden.

Dabei gibt es genau 7 Zwei–Kanten-Strecken und auch genau 7 Drei-Kanten-Strecken.
Dies ist klar, denn wenn man ausgehend von allen Ecken jeweils eine Zwei-Kanten-Strecke im Uhrzeigersinn zeichnet, so erhält man jede Zwei-Kanten-Strecke genau einmal (analog für Drei-Kanten-Strecken).

Wir untersuchen nun die Frage, wieviele Schnittpunkte eine solche Strecke mit den anderen Strecken im Inneren des 7-Ecks hat.

1.) Wir betrachten eine Zwei-Kanten-Strecke. Auf einer Seite dieser Strecke liegt dann 1 Ecke und auf der anderen Seite der Strecke liegen 4 Ecken des 7-Eckes.

    Folglich schneidet die ausgewählte Strecke genau $1 \cdot 4 = 4$ der anderen Strecken.

2.) Wir betrachten eine Drei-Kanten-Strecke. Auf einer Seite dieser Strecke liegen dann 2 Ecken und auf der anderen Seite der Strecke liegen 3 Ecken des 7-Eckes.

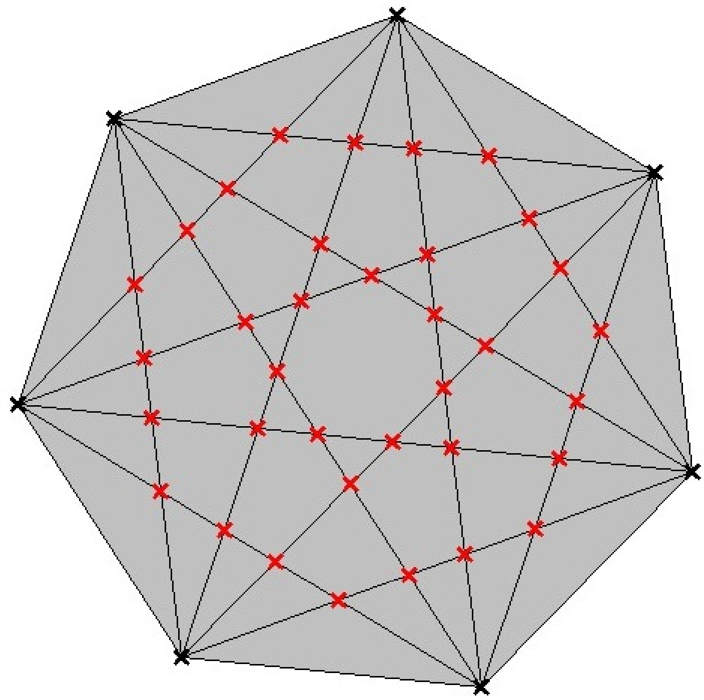
    Folglich schneidet die ausgewählte Strecke genau $2 \cdot 3 = 6$ der anderen Strecken.

Zählt man alle Schnittpunkte aller Zwei-Kanten-Strecken und aller Drei-Kanten-Strecken mit anderen Strecken zusammen, so erhält man die doppelte Anzahl der Schnittpunkte im Inneren des Siebenecks (man hat dann jeden Schnittpunkt doppelt gezählt).

Also gilt für die Anzahl A_7 der Schnittpunkte im Inneren des Siebenecks:

$$A_7 = \frac{7 \cdot 4 + 7 \cdot 6}{2} = 35$$

Lösungsvorschlag MG4 (2):
Man kann die Anzahl A_7 der Schnittpunkte im Inneren des Siebenecks auch "einfach" zeichnerisch bestimmen:



Durch Nachzählen stellt man fest: $A_7 = 35$

Anmerkung zur Lösung MG4:
Falls man davon ausgeht, dass sich niemals 3 oder mehr Strecken in einem Punkt schneiden*, kann man die Lösung auf beliebige konvexe n-Ecke verallgemeinern:

Im Inneren eines n-Ecks (mit $n \geq 3$) ergeben sich stets

$$A_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} \quad \underbrace{= \binom{n}{4}}_{\text{Binomialkoeffizient}}$$

viele Schnittpunkte.

So erhält man beispielsweise:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \tfrac{3\cdot2\cdot1\cdot0}{24} = \tfrac{0}{24} = 0\\
A_4 &= \tfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{24} = \tfrac{24}{24} = 1\\
A_5 &= \tfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{24} = \tfrac{120}{24} = 5\\
A_6 &= \tfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{24} = \tfrac{360}{24} = 15^*\\
A_7 &= \tfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{24} = \tfrac{840}{24} = 35\\
A_8 &= \tfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{24} = \tfrac{1680}{24} = 70^*
\end{aligned}
$$

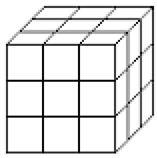
usw.

*: Bei einem regelmäßigen n-Eck schneiden sich im Fall, dass n gerade und $n \geq 6$ ist, stets 3 oder mehr Strecken im Inneren des n-Ecks in einem Punkt. In diesem Fall stimmt die obige Verallgemeinerung aber immer noch, wenn man solche Schnittpunkte mehrfach zählt.

Aufgabe MS1:

Gegeben sind viele kleine würfelförmige Bauklötze, von denen jeder eine Oberfläche von 20cm^2 hat.

Aus 27 dieser kleinen Würfel wird nun ein großer $3 \times 3 \times 3$-Würfel gebaut.



Wie groß ist die Oberfläche dieses großen Würfels?

(Alle Seiten sind zu berücksichtigen, also auch die Unterseite.)

Lösungsvorschlag MS1:

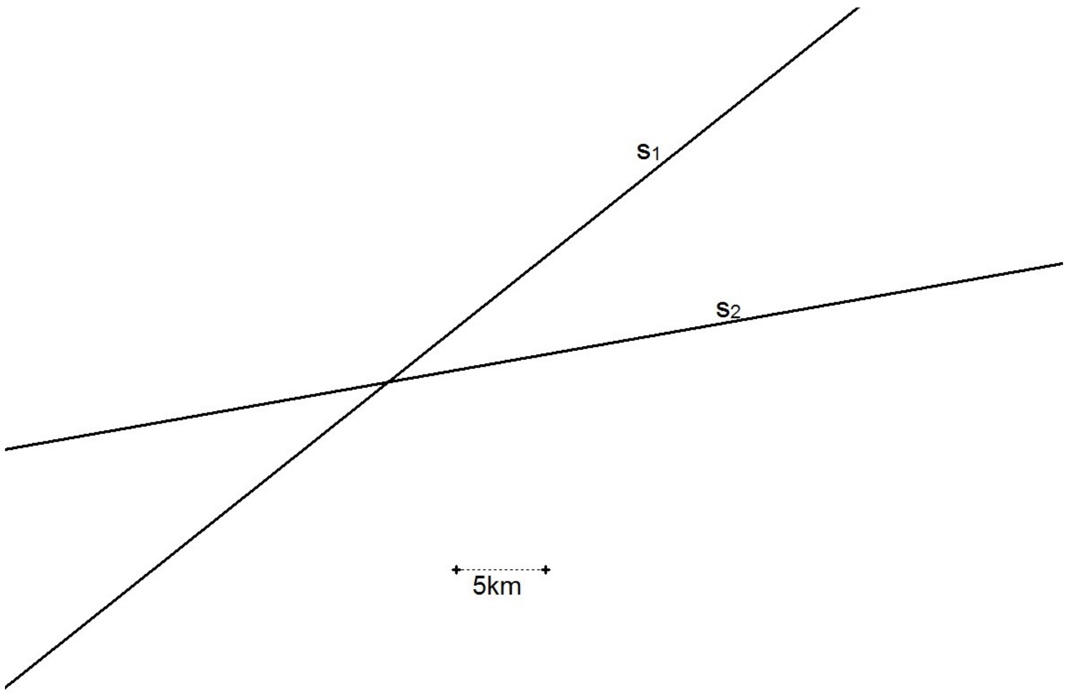
Jede Seitenfläche des großen Würfels ist $3 \cdot 3 = 9$-mal so groß wie eine Seitenfläche eines des kleinen Würfels. Folglich ist auch die gesamte Oberfläche des großen Würfels 9-mal so groß wie die eines kleinen Würfels. Sie beträgt somit:

$$9 \cdot 20\text{cm}^2 = 180\text{cm}^2$$

Aufgabe MS2:

Gegeben seien zwei nicht parallele, gerade Straßen s_1 und s_2.

Knut möchte sein Haus so bauen, dass es von beiden Straßen jeweils einen Abstand von höchstens 5 km hat. (In der Skizze ist die Streckenlänge 5 km eingezeichnet.)

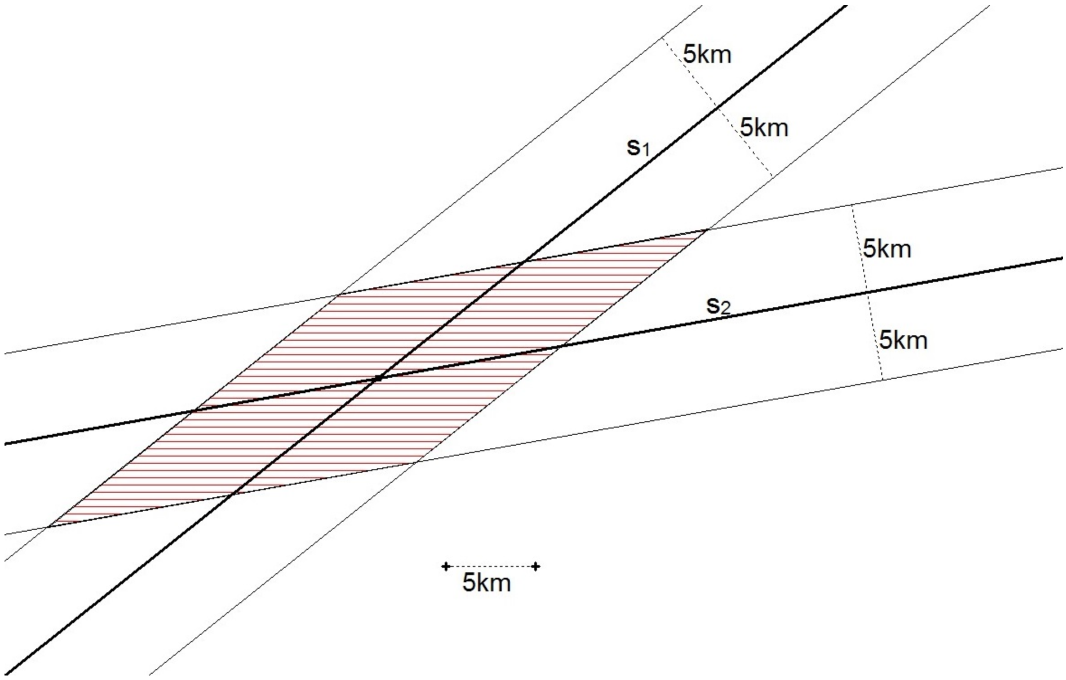


Zeichnet den Bereich ein, in dem Knut sein Haus bauen kann.

Um was für eine Figur handelt es sich bei diesem Bereich?

Gebt einen möglichst speziellen Begriff für die Figur an.

Lösungsvorschlag MS2:



Bei dem eingezeichneten Bereich handelt es sich um eine Raute.

Aufgabe MS3:
In der Fußballbundesliga erhält man bei einem Sieg 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage 0 Punkte. Eine Mannschaft hat nach 34 Spielen ein Torverhältnis von $17:17$.

Wieviele Punkte kann diese Mannschaft (theoretisch) maximal haben?

Lösungsvorschlag MS3:
Die Maximalpunktzahl ergibt sich bei folgenden Ergebnissen:

- 17 Siege mit jeweils $1:0$
- 16 Unentschieden mit jeweils $0:0$
- 1 Niederlage mit $0:17$

Damit hätte die Mannschaft:

$$17 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 67 \text{ Punkte}$$

Aufgabe MS4:

Bei einem Stadtfest hat sich die Besucherzahl im Vergleich zum Vorjahr um 25% erhöht. Die Gesamt-Umsatz beim Getränkeverkauf ist hingegen nur um 20% gestiegen.

Um wieviel Prozent ist der durchschnittliche Umsatz pro Person gefallen?

Lösungsvorschlag MS4:

Wir bezeichnen mit:

B = Besucherzahl in diesem Jahr	B_0 = Besucherzahl im letzen Jahr
U = Umsatz in diesem Jahr	U_0 = Umsatz im letzen Jahr
D = durchschnittlicher Umsatz in diesem Jahr = $\frac{U}{B}$	D_0 = durchschnittlicher Umsatz im letzen Jahr = $\frac{U_0}{B_0}$

Nach den Angaben in der Aufgabenstellung gilt:

$$\frac{B}{B_0} = 125\% = 1{,}25 \qquad \text{und} \qquad \frac{U}{U_0} = 120\% = 1{,}2$$

Daraus folgt:

$$\frac{D}{D_0} = \frac{\left(\frac{U}{B}\right)}{\left(\frac{U_0}{B_0}\right)} = \frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)}{\left(\frac{B}{B_0}\right)} = \frac{1{,}2}{1{,}25} = \frac{24}{25} = 0{,}96 = 96\%$$

Somit ist der durchschnittliche Umsatz pro Person um 4% gefallen.

Aufgabe MS5:
Die Einkaufswagen eines Supermarkts können ineinandergeschoben werden.

Ein Mitarbeiter stellt fest:

- 10 ineinandergeschobene Wagen haben eine Gesamtlänge von $2,80$m.
- 20 ineinandergeschobene Wagen haben eine Gesamtlänge von $5,10$m.

Wie lang ist ein Einkaufswagen?

Lösungsvorschlag MS5:
Sei ℓ die Länge eines Wagens und s die Länge des Teils eines Wagens, der herausragt, wenn man ihn in einen anderen Wagen hineinschiebt.

Wenn man n Wagen ineinanderschiebt, ergibt sich so eine Gesamlänge von:

$$G(n) = \ell + (n-1)\cdot s$$

(Der erste Wagen hat die Länge ℓ. Mit jedem weiteren Wagen erhöht sich die Gesamtlänge um s.)

Nun sind die folgenden Inmformationen gegeben:

$$\begin{array}{rclcrcrcll} G(10) & = & 2,80\text{m} & \Leftrightarrow & \ell & + & 9\cdot s & = & 2,80\text{m} & (1) \\ G(20) & = & 5,10\text{m} & \Leftrightarrow & \ell & + & 19\cdot s & = & 5,10\text{m} & (2) \end{array}$$

Bildet man die Differenz (2)-(1) dieser Gleichungen, so erhält man:

$$10\cdot s = 2,30\text{m} \quad \Rightarrow \quad s = 0,23\text{m}$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt:

$$\ell + 9\cdot 0,23\text{m} = 2,80\text{m} \quad \Rightarrow \quad \ell = 2,80\text{m} - 9\cdot 0,23\text{m} = 0,73\text{m}$$

Ein Einkausfwagen ist 73cm lang.

Aufgabe MS6:
Wie oft bilden der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr zwischen 0:00 Uhr und 12:00 Uhr einen rechten Winkel?

Lösungsvorschlag MS6:
Innerhalb von 12 Stunden macht der Stundenzeiger eine Umdrehung und der Minutenzeiger 12 Umdrehungen. Der Minutenzeiger "überrundet" daher den Stundenzeiger genau 11-mal.

Bei jeder dieser 11 Überrundungen durchläuft der Winkel zwischen den beiden Zeigern den Bereich $0°$ bis $360°$. Dabei entsteht jeweils zweimal (bei $90°$ und $270°$) ein rechter Winkel.

Also bilden die beiden Zeiger innerhalb von 12 Stunden genau $11 \cdot 2 = 22$-mal einen rechten Winkel.

Aufgabe MS7:

Knut schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10000 auf.

Wie oft schreibt er dabei die Ziffer 0 ?

Lösungsvorschlag MS7:

- Bei den einstelligen Zahlen $1, \ldots, 9$ kommt die Ziffer 0 nicht vor.
- Bei den zweistelligen Zahlen $10, \ldots, 99$ handelt es sich um $99 - 10 + 1 = 90$ Zahlen.

  -) An der 1.Stelle kann die Ziffer 0 nicht stehen.

  -) an der 2.Stelle steht bei jeder 10.Zahl die Ziffer 0, also insgesamt:

  $$\frac{90}{10} = 9\text{-mal die Ziffer } 0$$

- Bei den dreistelligen Zahlen $100, \ldots, 999$ handelt es sich um $999 - 100 + 1 = 900$ Zahlen.

  -) An der 1.Stelle kann die Ziffer 0 nicht stehen.

  -) an der 2.Stelle steht bei jeder 10.Zahl die Ziffer 0, also insgesamt:

  $$\frac{900}{10} = 90\text{-mal die Ziffer } 0$$

  -) an der 3.Stelle steht bei jeder 10.Zahl die Ziffer 0, also insgesamt:

  $$\frac{900}{10} = 90\text{-mal die Ziffer } 0$$

- Bei den vierstelligen Zahlen $1000, \ldots, 9999$ handelt es sich um $9999 - 1000 + 1 = 9000$ Zahlen.

  -) An der 1.Stelle kann die Ziffer 0 nicht stehen.

  -) an der 2.Stelle steht bei jeder 10.Zahl die Ziffer 0, also insgesamt:

  $$\frac{9000}{10} = 900\text{-mal die Ziffer } 0$$

  -) an der 3.Stelle steht bei jeder 10.Zahl die Ziffer 0, also insgesamt:

  $$\frac{900}{10} = 900\text{-mal die Ziffer } 0$$

  -) an der 4.Stelle steht bei jeder 10.Zahl die Ziffer 0, also insgesamt:

  $$\frac{900}{10} = 900\text{-mal die Ziffer } 0$$

- Die Zahl 10000 enthält:

4-mal die Ziffer 0

Insgesamt kommt die Ziffer 0 also

$$\underbrace{0}_{\text{einstellige Zahlen}} + \underbrace{9}_{\text{zweistellige Zahlen}} + \underbrace{(90+90)}_{\text{dreistellige Zahlen}} + \underbrace{(900+900+900)}_{\text{vierstellige Zahlen}} + \underbrace{4}_{\text{Zahl 10000}} = 2893\text{-mal}$$

in den Zahlen $1, 2, \ldots, 10000$ vor.

Aufgabe MS8:

Für eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\underbrace{\mathrm{ggT}(a,500)}_{\substack{\text{größter}\\\text{gemeinsamer}\\\text{Teiler}}} = 20 \qquad \text{und} \qquad \underbrace{\mathrm{kgV}(a,500)}_{\substack{\text{kleinstes}\\\text{gemeinsames}\\\text{Vielfaches}}} = 4500$$

Bestimmt die Zahl a.

Lösungsvorschlag MS8(1):

Wir betrachten die Primfaktorzerlegung (PFZ) von 500. Diese ist: $500 = 2^2 \cdot 5^3$

Man kann a in der folgenden Form schreiben:

$$a = 2^e \cdot 5^f \cdot b \quad \text{mit } e, f \in \mathbb{N}_0 \text{ und } b \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd zu 2 und 5}$$

Wir wissen:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \mathrm{ggT}(a,500) & = & 2^{\min(2,e)} & \cdot & 5^{\min(3,f)} \\ \| & & & & \\ 20 & = & 2^2 & \cdot & 5^1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(PFZ eindeutig)}} \left\{\begin{array}{lcll} \min(2,e) = 2 & \Rightarrow & e \geq 2 & (1) \\ \min(3,f) = 1 & \Rightarrow & f = 1 & (2) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \mathrm{kgV}(a,500) & = & 2^{\max(2,e)} & \cdot & 5^{\max(3,f)} & \cdot & b \\ \| & & & & & & \\ 4500 & = & 2^2 & \cdot & 5^3 & \cdot & 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(PFZ eindeutig)}} \left\{\begin{array}{lcll} \max(2,e) = 2 & \Rightarrow & e \leq 2 & (3) \\ \max(3,f) = 3 & \Rightarrow & f \leq 3 & (4) \\ & & b = 9 & (5) \end{array}\right\}$$

Also gilt $e = 2$ (folgt aus (1) und (3)) und $f = 1$ sowie $b = 9$. Es ergibt sich:

$$a = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 9 = 180$$

Lösungsvorschlag MS8(2):

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{ggT}(n,m) \cdot \mathrm{kgV}(n,m) = n \cdot m$

Daraus folgt:

$$\mathrm{ggT}(a,500) \cdot \mathrm{kgV}(a,500) = a \cdot 500 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mathrm{ggT}(a,500) \cdot \mathrm{kgV}(a,500)}{500} = \frac{20 \cdot 4500}{500} = 180$$