Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

Einzelwettbewerb	Aufgaben ME1, ME2, ME3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe ME1:

Bei einer Uhr mit Ziffernblatt werden:

- die 12 und die 4 mit einer Strecke verbunden
- die 8 und die 3 mit einer Strecke verbunden

In welchem Winkel schneiden sich die beiden Strecken.

Anmerkung: Gehe davon aus, dass die Zahlen $1, \dots, 12$ in regelmäßigen Abständen auf einem Kreis liegen.

Aufgabe ME2:

Auf einem Parkplatz stehen PKW und LKW.

- Es kommen 10 PKW dazu. Dadurch steigt der Anteil der PKW an allen Fahrzeugen um 10 Prozentpunkte.
- Danach kommen nochmal 10 PKW dazu. Dadurch steigt der Anteil der PKW an allen Fahrzeugen um weitere 5 Prozentpunkte.

Zum Begriff **"Prozentpunkt"** folgendes Beispiel:
Steigt ein Anteil von 50% auf 70%, so hat er sich um 20 Prozentpunkte erhöht.

Wie viele PKW und LKW befanden sich ursprünglich auf dem Parkplatz?

Aufgabe ME3:

Für eine reelle Zahl $u \in \mathbb{R}$ bezeichen wir mit $\lfloor u \rfloor \in \mathbb{Z}$ die Zahl, die man erhält, wenn man u auf die nächstkleinere ganze Zahl abrundet.

Beispiele:

$$\lfloor 11,6 \rfloor = 11 \qquad \lfloor -11,6 \rfloor = -12 \qquad \lfloor 24,99 \rfloor = 24 \qquad \lfloor 8 \rfloor = 8$$

(a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = 4$$

(b) Zeichne den Graphen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor$$

(c) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = x$$

(d) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MG1:
Bestimme alle sechsstelligen Zahlen der Form

$$aaabbb \quad \text{mit unbekannten Ziffern } a \in \{1, \dots, 9\} \text{ und } b \in \{0, \dots, 9\},$$

die durch 36 teilbar sind.

Tipp: Nutze eine Zerlegung von 36 als Produkt zweier geeigneter Zahlen.

Aufgabe MG2:
Auf einer zweispurigen Autobahn herscht stockender Verkehr.

- Auf der rechten Spur fahren LKW.
  Jeder LKW hat eine Länge von 10 Metern, der Abstand zwischen zwei LKW beträgt 8 Meter.
- Auf der linken Spur fahren PKW.
  Jeder PKW hat eine Länge von 5 Metern, der Abstand zwischen zwei PKW beträgt 7 Meter.

Auf beiden Spuren wird jeweils eine konstante Geschwindigkeit gefahren, wobei die PKW etwas schneller sind. Der Fahrer eines PKW stellt fest, dass er pro Minute immer genau 4 LKW überholt.

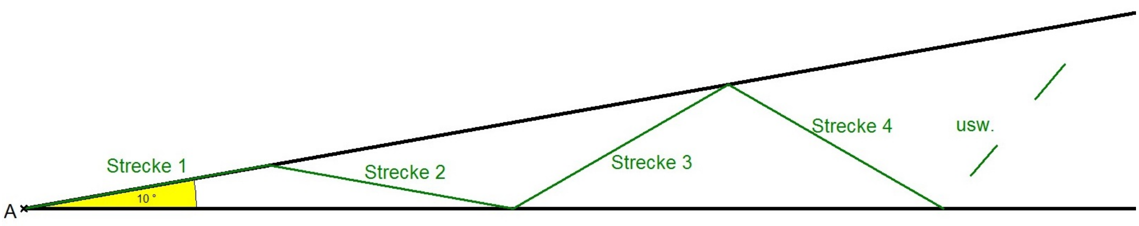
(a) Von wie vielen PKW wird ein LKW pro Minute überholt?

(b) Ein Motoradfahrer fährt zwischen den Spuren mit hoher Geschwindigkeit und überholt so pro Minute immer 12 PKW. Wie viele LKW überholt er pro Minute?

Aufgabe MG3:
Gegeben seien zwei Halbgeraden, die im selben Punkt A beginnen und einen Winkel von $\alpha = 10°$ bilden.

Nun soll ein Streckenzug mit Strecken gleicher Länge gebildet werden, wobei die erste Strecke im Punkt A beginnt und auf einer der Halbgeraden liegt und jede weitere Strecke die beiden Halbgeraden miteinander verbindet.

(Die Strecken dürfen sich dabei nicht überschneiden oder übereinanderliegen.)



Aus wie vielen Strecken kann der Streckenzug maximal bestehen?

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MG4:

Gegeben ist eine Raute $\square ABCD$, wir betrachten außerdem den Winkel $\alpha = \angle BAD$.

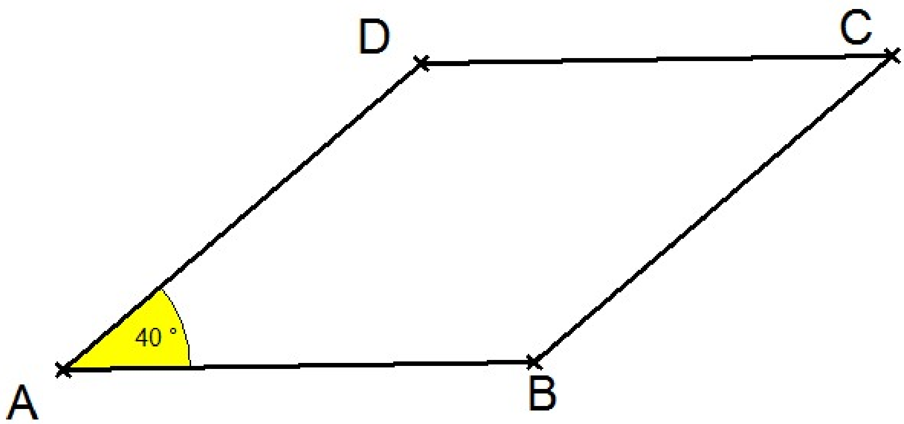
Gesucht ist die Menge M aller Punkte X im Inneren der Raute, für die gilt:

$$|\overline{XA}| > |\overline{XB}| > |\overline{XC}| > |\overline{XD}|$$

(Dabei bezeichnet $|\overline{PQ}|$ den Abstand zwischen zwei Punkten P und Q.)

(a) Im ersten Fall sei $\alpha = 40°$.

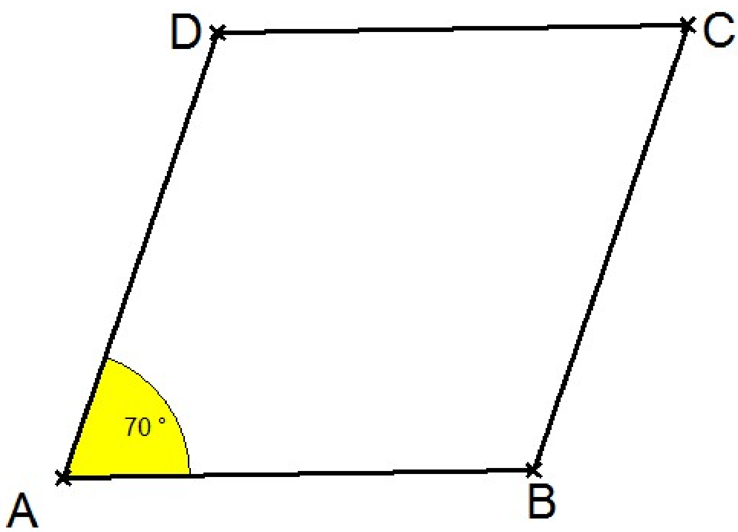
Zeichne M in die folgende Graphik ein:



Um was für eine Art von Figur handelt es sich bei M? (Nenne einen möglichst speziellen Begriff.)

(b) Im zweiten Fall sei $\alpha = 70°$.

Zeichne M in die folgende Graphik ein:



Um was für eine Art von Figur handelt es sich bei M? (Nenne einen möglichst speziellen Begriff.)

(c) Bekannt sei nun, dass $0° < \alpha < 90°$ gilt.

Bei welchen Werten von α ist M eine Figur wie in Fall 1?
Bei welchen Werten von α ist M eine Figur wie in Fall 2?

Begründe deine Antwort.

Aufgabe MS1:

In einer Quizshow beantworten alle Personen im Publikum zwei Fragen. Dabei stellt man fest:

- Genau 60 Personen beantworten beide Fragen richtig, genau 20 Personen beantworten beide Fragen falsch.
- Die erste Frage wurde 150-mal richtig beantwortet, die zweite Frage wurde 80-mal richtig beantwortet.

Wie viele Personen sitzen im Publikum?

Aufgabe MS2:

Ein rechteckiges Spielfeld ist in 6×10 quadratische Felder aufgeteilt.

Nun soll ein rechteckiger Spielstein der Größe 2×3 Felder, so auf das Spielbrett gelegt werden, dass er genau 6 Felder bedeckt.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Felder auszuwählen?

Aufgabe MS3:

Würde man bei einem Rechteck beide Seitenlängen um 1cm verkleinern, so würde der Flächeninhalt um 20cm^2 kleiner werden.

Um wieviel würde sich der Flächeninhalt erhöhen, wenn man stattdessen beide Seitenlängen um 1cm vergrößern würde?

Aufgabe MS4:

99 Piraten erbeuten einen Schatz. Da die Piraten eine strenge Rangfolge untereinander haben, wird der Schatz nach folgenden Regeln verteilt:

Der 1. Pirat erhält die Hälfte des Schatzes.
Der 2. Pirat erhält ein Drittel von dem, was übrigbleibt.
Der 3. Pirat erhält ein Viertel von dem, was übrigbleibt.
Der 4. Pirat erhält ein Fünftel von dem, was übrigbleibt.
und so weiter
und so weiter
Der 99. Pirat erhält ein Hundertstel von dem, was übrigbleibt.

Der verbleibende Rest wird für die Reparatur des Schiffs verwendet. Um welchen Anteil des gesamten Schatzes handelt es sich dabei?

Aufgabe MS5:

(a) Gegeben sind 8 Spielwürfel mit den Augenzahlen $1, \dots, 6$, wobei immer die 1 der 6, die 2 der 5 und die 3 der 4 gegenüberliegt.

Diese werden zu einem großen $2 \times 2 \times 2$- Würfel zusammengebaut.

Welchen Wert kann die Summe aller Augenzahlen auf der Außenfläche des großen Würfels (auch Ober- und Unterseite) maximal haben?

(b) Nun werden 27 solcher Spielwürfel zu einem großen $3 \times 3 \times 3$- Würfel zusammengebaut.

Welchen Wert kann die Summe aller Augenzahlen auf der Außenfläche des großen Würfels (auch Ober- und Unterseite) maximal haben?

Aufgabe MS6:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck sowie drei überschneidungsfreie Kreise um die Eckpunkte des Dreiecks mit gleichem Radius.

Sei F die Gesamtfläche aller drei Kreise.

Welcher Anteil von F liegt im Inneren des Dreiecks?

Aufgabe MS7:
Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ hat Rest 16 bei Division durch 21.

(a) Welchen Rest hat a bei Division durch 7?

(b) Welchen Rest kann a bei Division durch 63 haben? (Geben Sie alle Möglichkeiten an.)

(c) Welchen Rest kann a bei Division durch 9 haben? (Geben Sie alle Möglichkeiten an.)

Aufgabe MS8:
Arne und Barbara schwimmen Bahnen auf einer 50-Meter-Bahn im Freibad. Sie starten gleichzeitig an gegenüberliegenden Seiten (Startseite A für Arne und B für Barbara). Beide schwimmen mit konstanter Geschwindigkeit, sind aber unterschiedlich schnell.

Zum ersten Mal begegnen Sie sich 23 Meter von Seite B entfernt.

(a) An welcher Stelle begegnen Sie sich zum zweiten Mal?

(b) An welcher Stelle begegnen Sie sich zum dritten Mal?

(c) An welcher Stelle überholt Arne Barbara zum ersten Mal?

(Geben Sie jeweils die Entfernung zu Seite A oder zu Seite B an.)