Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

Einzelwettbewerb, Klasse 11/12

Aufgabe OE1:

Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte A, B, die beide auf dem Graphen der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegen und zusammen mit dem Koordinatenursprung $O = (0,0)$ ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Aufgabe OE2:

Paul lädt seine Freunde zum Berliner-Essen ein. Auf dem Tisch stehen 3 Teller mit Berlinern:

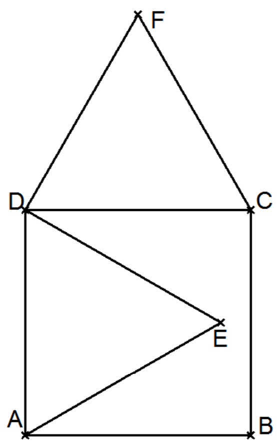
- Auf dem 1.Teller sind 8 Quark-Berliner, 6 mit Nussfüllung und 10 mit Marmelade gefüllte Berliner.
- Auf dem 2.Teller sind 12 Quark-Berliner, 10 mit Nussfüllung und 8 mit Marmelade gefüllte Berliner.
- Auf dem 3.Teller sind eine unbekannte Zahl von Quark-Berlinern, 8 mit Nussfüllung und 12 mit Marmelade gefüllte Berliner.

Es ist Folgendes bekannt: Wenn man von jedem der drei Teller jeweils einen Berliner zufällig auswählt, ist die Wahrscheinlichkeit drei Berliner mit gleicher Füllung zu bekommen, genau $\frac{3}{25}$.

Wie viele Quark-Berliner sind auf dem 3.Teller?

Aufgabe OE3:

$\square ABCD$ ist ein Quadrat. $\triangle AED$ und $\triangle DCF$ sind gleichseitig.

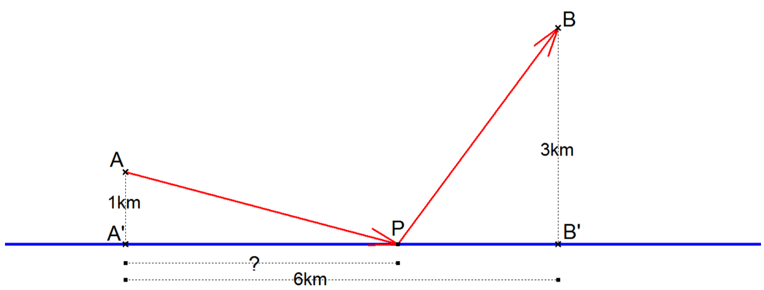


Begründen Sie, dass die Punkte B, E und F auf einer Geraden liegen.

Gruppenwettbewerb, Klasse 11/12

Aufgabe OG1:
Ein Forscher befindet sich im Punkt A, 1km entfernt von einem völlig geradlinigen Fluss. Er möchte im Fluss eine Wasserprobe nehmen und sie zu der Station im Punkt B bringen. Der Punkt B liegt 6 km weiter flussabwärts als A und ist 3 km vom Fluss entfernt.

Wie groß muss die Länge der Strecke $\overline{A'P}$ gewählt werden, damit der Gesamtweg, den der Forscher zurücklegen muss, minimal wird?



Aufgabe OG2:
Beim Werfen zweier gewöhnlicher 6-seitiger Würfel (mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$) sind die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Augensummen nicht gleich groß. (Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 7 zu würfeln größer als die die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 2 zu würfeln, denn die Augensumme 7 kann auf mehrere Arten zustande kommen.)

Wie kann man zwei 6-seitige Würfel so beschriften, dass nur die Augensummen $1, \ldots, 12$ vorkommen können und diese alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten?

Hinweis: Dabei dürfen die beiden Würfel unterschiedlich beschriftet werden. Es darf auch die Zahl 0 benutzt werden und es ist auch erlaubt, die gleiche Zahl mehrmals auf demselben Würfel zu verwenden.

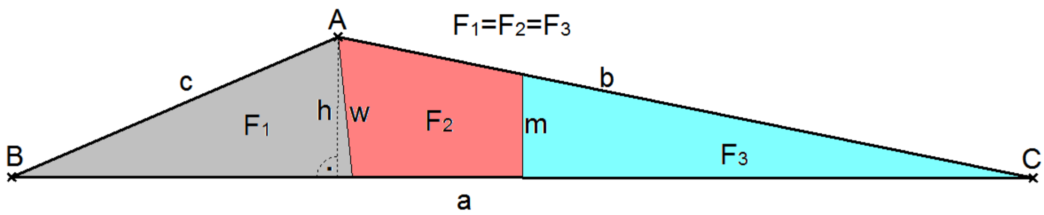
Aufgabe OG3:

In einer Kasse befinden sich nur 2-Cent-, 5-Cent- und 10-Cent-Münzen. Insgesamt sind es genau 50 Münzen im Gesamtwert von $1,37$ Euro.

Wieviele Münzen von jeder Sorte befinden sich in der Kasse?

Aufgabe OG4:

$\triangle ABC$ wird durch die Winkelhalbierende w durch den Winkel α und die Mittelsenkrechte m zur Strecke $\overline{BC}$ in drei gleich große Flächen geteilt.



Berechnen Sie die Seitenlängen a und b in Abhängigkeit von c.

Speedwettbewerb, Klasse 11/12

Aufgabe OS1:
Zeichnen Sie 6 Punkte in der Ebene und Verbindungslinien zwischen einigen der Punkte. Dabei soll jeder Punkt mit genau 3 anderen Punkten direkt durch eine Linie verbunden sein. (Die Linien dürfen sich dabei auch schneiden.)

Aufgabe OS2:
Kann man auch 7 Punkte in der Ebene so durch Linien miteinander verbinden, dass jeder Punkt mit genau 3 anderen Punkten direkt verbunden ist?
(Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe OS3:
Anne, Beate und Charlie laufen Runden auf dem Sportplatz. Sie laufen unterschiedlich schnell, aber jeder läuft mit konstanter Geschwindigkeit.
Anne stellt fest:

1.) Immer wenn ich 7 Runden gelaufen bin, überhole ich Beate.

2.) Immer wenn ich 10 Runden gelaufen bin, überhole ich Charlie.

Wieviel Runden muss Charlie laufen, um Beate zu überholen?

Aufgabe OS4:
Eine 4-stellige natürliche Zahl ist von der Form $a00a$ mit einer unbekannten Ziffer $a \in \{1, \ldots, 9\}$.

Begründen Sie, dass die Zahl durch $7, 11$ und 13 teilbar sein muss.

Aufgabe OS5:

Bei einem Fussballturnier spielen 6 Mannschaften gegeneinander. Dabei spielt jede Mannschaft einmal gegen jede andere Mannschaft. Bei einem Sieg erhält man 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage 0 Punkte. Hier ist die Endtabelle:

Platz	Mannschaft	Punkte
1.	Team A	11
2.	Team B	9
3.	Team C	8
4.	Team D	7
5.	Team E	4
6.	Team F	2

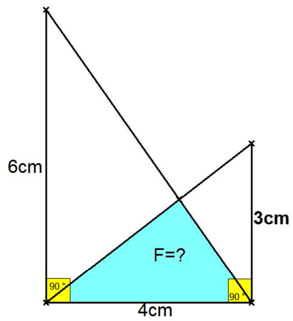
Wieviele Unentschieden hat es insgesamt gegeben?

Aufgabe OS6:

Welches ist die kleinste natürliche Zahl, für die gilt:

- Wenn man sie durch 2 teilt, bleibt der Rest 1.
- Wenn man sie durch 3 teilt, bleibt der Rest 2.
- Wenn man sie durch 4 teilt, bleibt der Rest 3.
- Wenn man sie durch 5 teilt, bleibt der Rest 4.
- Wenn man sie durch 6 teilt, bleibt der Rest 5.

Aufgabe OS7:
Zwei rechtwinklige Dreiecke haben eine gemeinsame Kathete der Länge 4cm. Die andere Kathete hat beim ersten Dreieck die Länge 6cm und beim zweiten Dreieck die Länge 3cm.



Wie groß ist die Schnittfläche der beiden Dreiecke?

Aufgabe OS8:
Welche der folgenden beiden Zahlen x, y ist größer?

$$x = \sqrt{1001} + \sqrt{1004} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{1002} + \sqrt{1003}$$

(Begründen Sie Ihre Antwort.)