Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

Aufgabe OE1:

Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit einem rechten Winkel bei C hat die Kathetenlängen:

$$a = \left|\overline{BC}\right| = 15\text{cm} \quad \text{und} \quad b = \left|\overline{AC}\right| = 8\text{cm}$$

Nun wird der Punkt M auf der Kathete $\overline{BC}$ gewählt, für den gilt:

Der Kreis mit Mittelpunkt M, der durch den Punkt C verläuft, berührt die Hypothenuse $\overline{AB}$.

Bestimmen Sie den Radius dieses Kreises.

Es sollte nachvollziehbar sein, wie Sie zu dem Ergebnis gekommen sind.

Aufgabe OE2:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Von den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ wird eine gestrichen. Der Durchschnitt der übrigen Zahlen beträgt $8{,}2$.

Was ist n und welche Zahl wurde gestrichen?

Begründen Sie auch, dass es nur eine Möglichkeit gibt.

Aufgabe OE3:

(a) Wir betrachten die beiden (parallelen) Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen:

$$g_1 : y = 2x \qquad \text{und} \qquad g_2 : y = 2x + 5$$

Wie groß ist der Abstand von g_1 und g_2?

(b) Seien nun $n, m \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden (parallelen) Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen:

$$g_1 : y = mx \qquad \text{und} \qquad g_2 : y = mx + n$$

Wie groß ist der Abstand von g_1 und g_2 in Abhängigkeit von n und m?

Es sollte nachvollziehbar sein, wie Sie zu den Ergebnissen gekommen sind.

Aufgabe OG1:

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die

$$n + 20 \quad \text{und} \quad n - 25$$

beides Quadratzahlen sind.

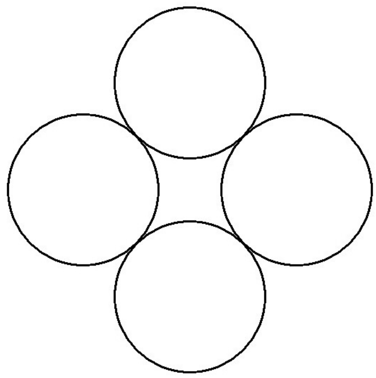
Begründen Sie auch, dass Sie alle geeigneten $n \in \mathbb{N}$ gefunden haben.

Aufgabe OG2:

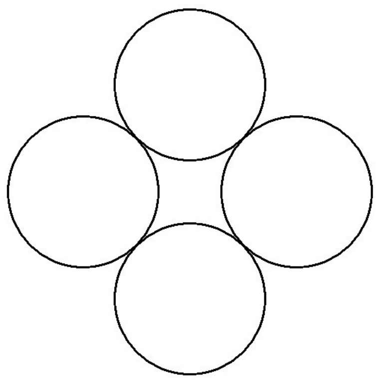
Die Mittelpunkte von 4 Kreisen mit gleichem Radius r bilden ein Quadrat. Dadurch entsteht die unten abgebildete Figur, in der jeder der Kreise jeweils zwei der anderen berührt:

Ein Beweis ist nicht erforderlich.
Es sollte aber nachvollziehbar sein, wie Sie zu den Ergebnissen gekommen sind.

(a) Wie groß ist (in Abhängigkeit vom Kreisradius r) der kleinstmögliche Flächeninhalt eines Quadrats, das alle 4 Kreise enthält?



(b) Wie groß ist (in Abhängigkeit vom Kreisradius r) der größtmögliche Flächeninhalt eines Quadrats, das innerhalb der von den 4 Kreisen umschlossenen Fläche enthalten ist?



Aufgabe OG3:

40 rote und 60 schwarze Kugeln werden auf zwei Kisten verteilt, so dass in jeder Kiste genau 50 Kugeln liegen. (Dabei ist aber nicht bekannt, wieviele rote bzw. schwarze Kugeln in jede der beiden Kisten kommen.)

Nun wird aus jeder der beiden Kiste zufällig eine Kugel gezogen. Es bezeichne P die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dabei zwei verschiedenfarbige Kugeln zieht.

Wie groß ist P mindestens und wie groß ist P höchstens?

Die Antworten sind auch zu begründen.

Aufgabe OG4:

Gegeben seien zwei Zahlen $a, b > 0$. Wir betrachten die beiden Punkte $A(0|a)$ und $B(b|0)$ in der Ebene. Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Diagonale eines Quadrats.

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a und b) die Koordinaten der anderen beiden Eckpunkte dieses Quadrats.

Es sollte nachvollziehbar sein, wie Sie zu den Ergebnissen gekommen sind.

Aufgabe OS1:

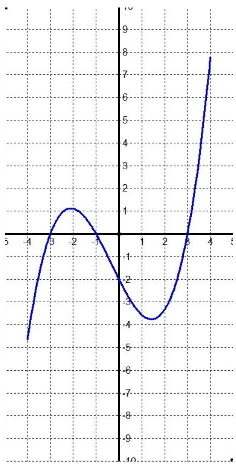
In einem zylinderförmigen Eimer mit dem Radius 10cm steht das Wasser 30cm hoch. Nun wird ein langer, zylinderförmiger Stab aus Metall mit dem Radius 5cm (vertikal) in den Eimer gestellt.

Wie hoch steht das Wasser nun?

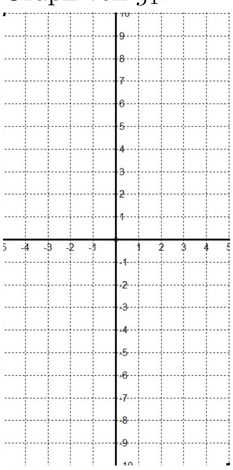
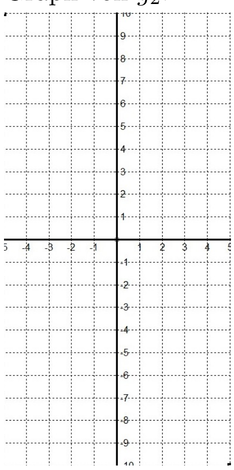
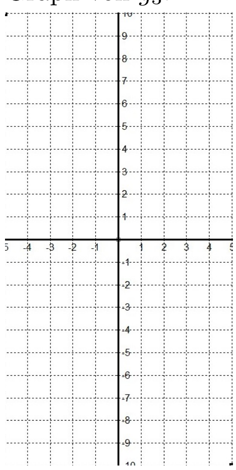
Wir gehen davon aus, dass das Wasser nicht überläuft.

Aufgabe OS2:

Gegeben ist der folgende Graph der Funktion: $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$



Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen $g_1, g_2, g_3 : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ in die angegebenen Koordinatensysteme:

$g_1(x) = \lvert f(x) \rvert$	$g_2(x) = f(\lvert x \rvert)$	$g_3(x) = \lvert f(\lvert x \rvert) \rvert$
Graph von g_1: 	Graph von g_2: 	Graph von g_3: 

Aufgabe OS3:
In der Fußballbundesliga erhält man bei einem Sieg 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage 0 Punkte. Eine Mannschaft hat nach 34 Spielen ein Torverhältnis von $17:17$.

Wieviele Punkte kann diese Mannschaft (theoretisch) maximal haben?

Aufgabe OS4:
Wie oft bilden der Stunden- und der Minutenzeiger zwischen 0:00 Uhr und 12:00 Uhr einen rechten Winkel?

Aufgabe OS5:
6 Würfel (jeweils mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$) werden geworfen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen gerade ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der Augenzahlen gerade ist?

(Alle Würfel zeigen jede der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit.)

Aufgabe OS6:
Sortieren Sie die Zahlen

$$\sqrt[2]{2} \quad , \quad \sqrt[3]{3} \quad , \quad \sqrt[6]{6} \quad , \quad \sqrt[12]{12}$$

nach der Größe.

Aufgabe OS7:
Ein Punkt der innerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt, hat

- von A den Abstand $3cm$,
- von B den Abstand $7cm$,
- von C den Abstand $11cm$.

Welchen Abstand hat dieser Punkt von D?

Aufgabe OS8:
Wir betrachten die Zahl:

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$ (Man nennt diese Zahl auch **Fakultät von 9**.)

Welches ist die größte Quadratzahl, die ein Teiler von a ist?