Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

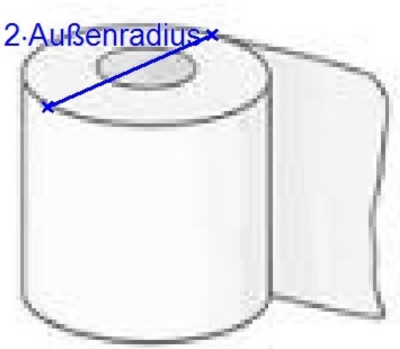
Aufgabe OE1:

(a) Welche Punkte in der Ebene haben sowohl zur x-Achse, als auch zum Punkt $A = (0,1)$ den Abstand 13 ?

(b) Die Menge aller Punkte in der Ebene, die von der x-Achse denselben Abstand haben wie vom Punkt $A = (0,1)$ entspricht dem Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Aufgabe OE2:



Bei einer Toilettenpapierrolle gilt:
Wenn der Außenradius nur noch halb so groß wie zu Beginn ist, ist noch 1/5 des Papiers übrig.

Welcher Anteil des Papiers ist noch übrig, wenn der Außenradius nur noch 1/3 so groß wie zu Beginn ist.

Hinweis: Sie können die Rolle als zylindrisch annehmen.

Aufgabe OE3:
Für eine positive reelle Zahl u bezeichen wir mit $\lfloor u \rfloor \in \mathbb{N}$ bzw. $\lceil u \rceil \in \mathbb{N}$ die Zahl, die man erhält, wenn man u auf die nächstkleinere bzw. nächstgrößere natürliche Zahl abrundet bzw. aufrundet.

Beispiele:	$\lfloor 11,6 \rfloor$	=	11	und	$\lceil 11,6 \rceil$	=	12
	$\lfloor \sqrt{5} \rfloor$	=	2	und	$\lceil \sqrt{5} \rceil$	=	3
	$\lfloor 24,01 \rfloor$	=	24	und	$\lceil 24,01 \rceil$	=	25
	$\lfloor 8 \rfloor$	=	8	und	$\lceil 8 \rceil$	=	8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

(a) $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{2} = \dfrac{\lceil x \rceil}{3}$ (b) $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = \left\lceil \dfrac{x}{3} \right\rceil$

über der Grundmenge $\mathbb{R}^+ =]0,\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OG1:

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts A auf der x-Achse und eines Punkts B auf dem Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$$

so dass A, B und der Ursprung $O = (0, 0)$ ein gleichseitiges Dreieck $\triangle OAB$ bilden.

Aufgabe OG2:

Gegeben seien zwei Punkte M_1 und M_2 in einem Abstand von 10cm und zwei Kreise:

- k_1 mit Radius 1cm und Mittelpunkt M_1
- k_2 mit Radius 7cm und Mittelpunkt M_2

Eine Gerade g ist Tangente beider Kreise und berührt k_1 im Punkt B_1 und k_2 im Punkt B_2.

Bestimmen Sie den Abstand von B_1 zu B_2.

Achtung: Die Aufgabenstellung ist nicht eindeutig. Finden Sie alle möglichen Lösungen.

Aufgabe OG3:

In einem geschlossenen kegelförmigen Behälter aus Glas befindet sich Wasser.

Stellt man den Behälter auf die Grundfläche des Kegels steht das Wasser 1cm hoch.

Hält man den Behälter mit der Kegelspitze nach unten steht das Wasser 2cm hoch.

Bestimmen Sie die Höhe des Kegels.

Anmerkung: Sie benötigen das Wurzelzeichen, um das Ergebnis anzugeben. Sie brauchen die vorkommende(n) Wurzel(n) nicht (näherungsweise) zu berechnen.

Aufgabe OG4:

Die **Quersumme** einer natürlichen Zahl ist definiert als die Summe Ihrer Ziffern. Wie viele aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit lauter verschiedenen Quersummen gibt es maximal?

Geben Sie die kleinsten solchen Zahlen an.

Begründen Sie auch die Korrektheit Ihrer Lösung.

Aufgabe OS1:

Bestimmen Sie eine natürliche Zahl x mit: $x^{20} = 9^{50}$

Aufgabe OS2:

Knut würfelt gleichzeitig mit einem 10-seitigen Würfel, der die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 10$ zeigt, einem 8-seitigen Würfel, der die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 8$ zeigt und einem gewöhnlichen 6-seitigen Würfel, der die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ zeigt.

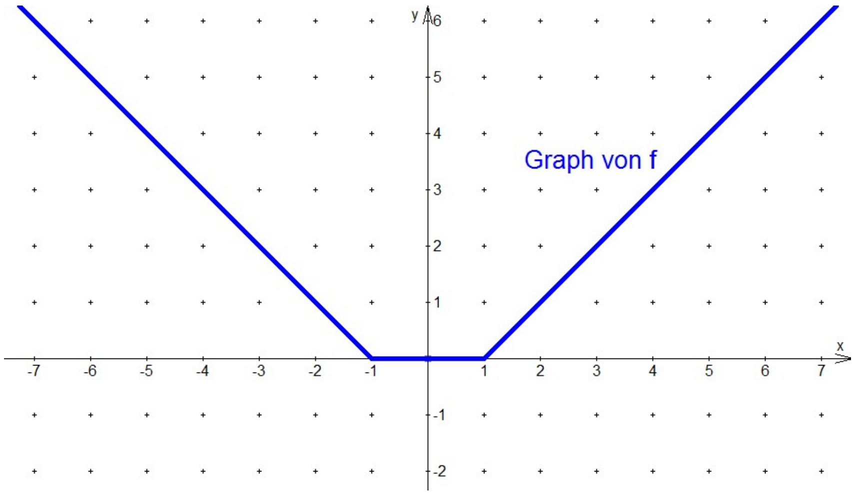
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Würfel diesselbe Augenzahl zeigen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Würfel verschiedene Augenzahlen zeigen?

(Alle Würfel zeigen jede mögliche Augenzahl mit derselben Wahrscheinlichkeit.)

Aufgabe OS3:

Das folgende Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

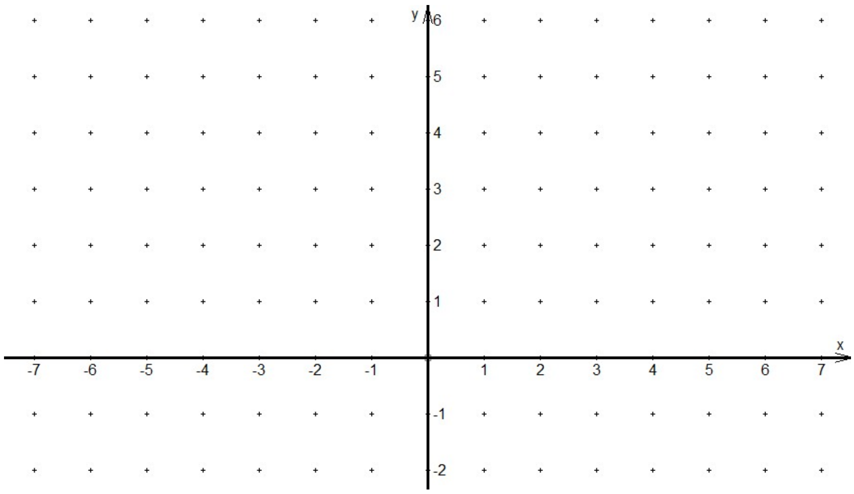


Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = f(f(x))$$

Man nennt g auch die **Hintereinanderausführung** von f mit sich selbst und schreibt dafür $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$.

in das folgende Koordinatensystem:



Aufgabe OS4:

99 Piraten erbeuten einen Schatz. Da die Piraten eine strenge Rangfolge untereinander haben, wird der Schatz nach folgenden Regeln verteilt:

Der 1. Pirat erhält die Hälfte des Schatzes.
Der 2. Pirat erhält ein Drittel von dem, was übrigbleibt.
Der 3. Pirat erhält ein Viertel von dem, was übrigbleibt.
Der 4. Pirat erhält ein Fünftel von dem, was übrigbleibt.
und so weiter
und so weiter
Der 99. Pirat erhält ein Hundertstel von dem, was übrigbleibt.

Der verbleibende Rest wird für die Reparatur des Schiffs verwendet. Um welchen Anteil des gesamten Schatzes handelt es sich dabei?

Aufgabe OS5:

Alex und Ben bilden ein Team bei einem Rennen, bei dem beide eine 5km lange Strecke zurücklegen müssen, wobei sie aber nur ein Fahrrad zur Verfügung haben. Es ist erlaubt, dass einer mit dem Rad vorausfährt, dieses abstellt und dann weiterläuft, und der andere zunächst läuft, das Rad aufnimmt und ins Ziel fährt. (Verboten ist es, dass beide gleichzeitig das Rad benutzen.)

Es gilt:

- Alex kann 12km/h schnell laufen.
- Ben kann 10km/h schnell laufen.
- Beide können 20km/h schnell radfahren.

Wie lange brauchen sie, um so schnell wie möglich (beide) ins Ziel zu kommen? Geben Sie das Ergebnis in Minuten an.

Aufgabe OS6:

Der sogenannte **goldene Schnitt** ist eine Zahl $\varphi > 1$, die die Gleichung

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

erfüllt. Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^8 = a \cdot \varphi + b$.

Aufgabe OS7:

Die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ werden in eine zufällige Reihenfolge gebracht. Dabei entsteht eine Zahl N.

(Es ist dabei auch erlaubt, dass die Ziffer 0 ganz vorn steht. In diesem Fall hat sie auf N keine Auswirkung.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 9 teilbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 25 teilbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 225 teilbar ist.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OS8:

Gegeben sei ein regelmäßiges 12-Eck.

(a) Wie viele jeweils zueinander nicht-kongruente Dreiecke, deren Eckpunkte auch Eckpunkte des 12-Ecks sind, gibt es?

(b) Wie viele dieser Dreiecke sind rechtwinklig?