

## Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

ohne Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

## TAG DER MATHEMATIK 2018

### Aufgabe OE1:

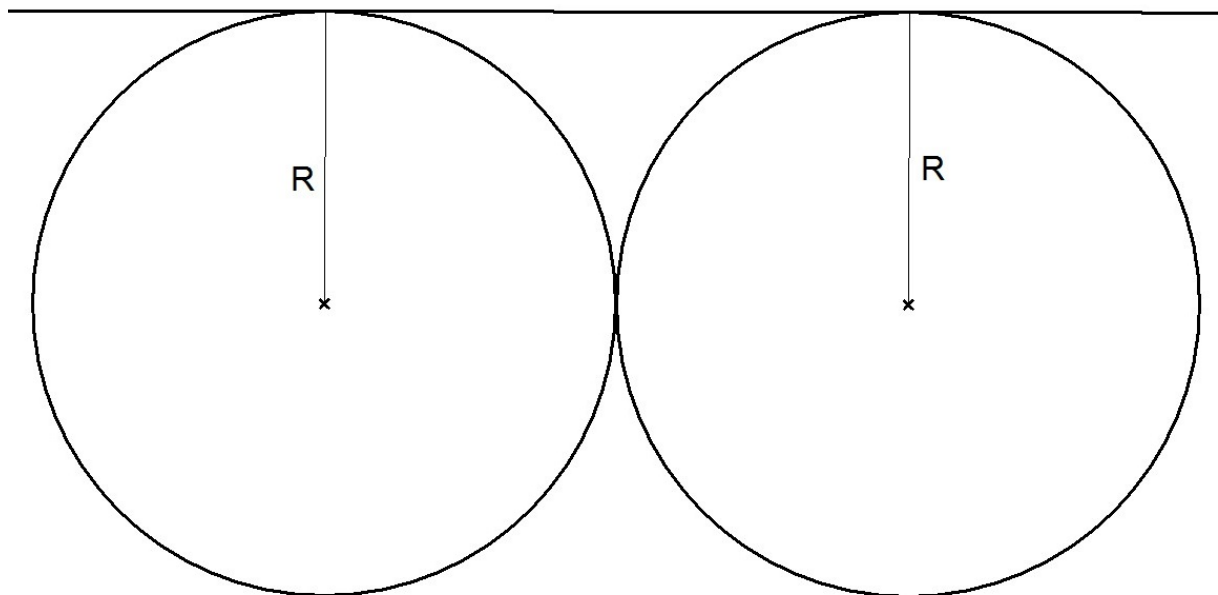
Heute vor genau 5 Jahren (also am 20.03.2013) betrug das Durchschnittsalter der Mitglieder einer Familie exakt 22 Jahre. Irgendwann in den letzten 5 Jahren wurde ein weiteres Kind dieser Familie geboren.

Heute (also am 20.03.2018) beträgt das Durchschnittsalter der Familie erneut exakt 22 Jahre.

Wann wurde das Kind geboren? Aus wievielen Personen besteht die Familie heute?

### Aufgabe OE2:

Gegeben seien zwei Kreise mit gleichem Radius  $R$ , die einander in einem Punkt berühren, sowie eine gemeinsame Tangente an beide Kreise.



Innerhalb der von beiden Kreisen und der Tangente begrenzten Fläche soll nun ein weiterer Kreis mit Radius  $r$  eingezeichnet werden.

Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert für  $r$  in Abhängigkeit von  $R$ .

### Aufgabe OE3:

Von den vier Eckpunkten eines Quadrats liegen

- zwei auf der Geraden mit der Gleichung  $y = 3$ ,
- zwei auf dem Graphen der Normalparabel mit der Gleichung  $y = x^2$ .

Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Eckpunkte.

**Achtung:** Die Lösung der Aufgabe ist nicht eindeutig. Finden Sie alle möglichen Lösungen.

## TAG DER MATHEMATIK 2018

### Aufgabe OG1:

In einem Theater gibt es drei Preiskategorien A, B und C (wobei von jeder Preiskategorie auch Karten verkauft werden).

Eine Woche vor der Vorstellung stellt der Vorverkaufsleiter fest, dass

- 20% der Karten der Kategorie A
- 30% der Karten der Kategorie B
- 40% der Karten der Kategorie C

verkauft sind. Insgesamt sind zu diesem Zeitpunkt genau 28% aller Karten verkauft.

(a) Einen Tag vor der Vorstellung sind dann

- 30% der Karten der Kategorie A
- 50% der Karten der Kategorie B
- 70% der Karten der Kategorie C

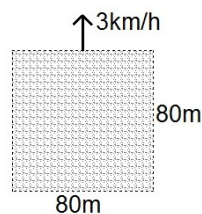
verkauft. Welcher Anteil aller Karten ist nun insgesamt verkauft?

(b) Gesucht ist nun der Anteil  $p_A$  der Karten der Kategorie A unter allen Karten insgesamt.

Bestimmen Sie ein (möglichst genaues) Intervall, in dem  $p_A$  liegen muss.

### Aufgabe OG2:

Eine Schafherde bildet ein Quadrat mit 80 Metern Seitenlänge. Sie bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit von 3km/h in gerader Richtung (senkrecht zu einer Seite des Quadrats).



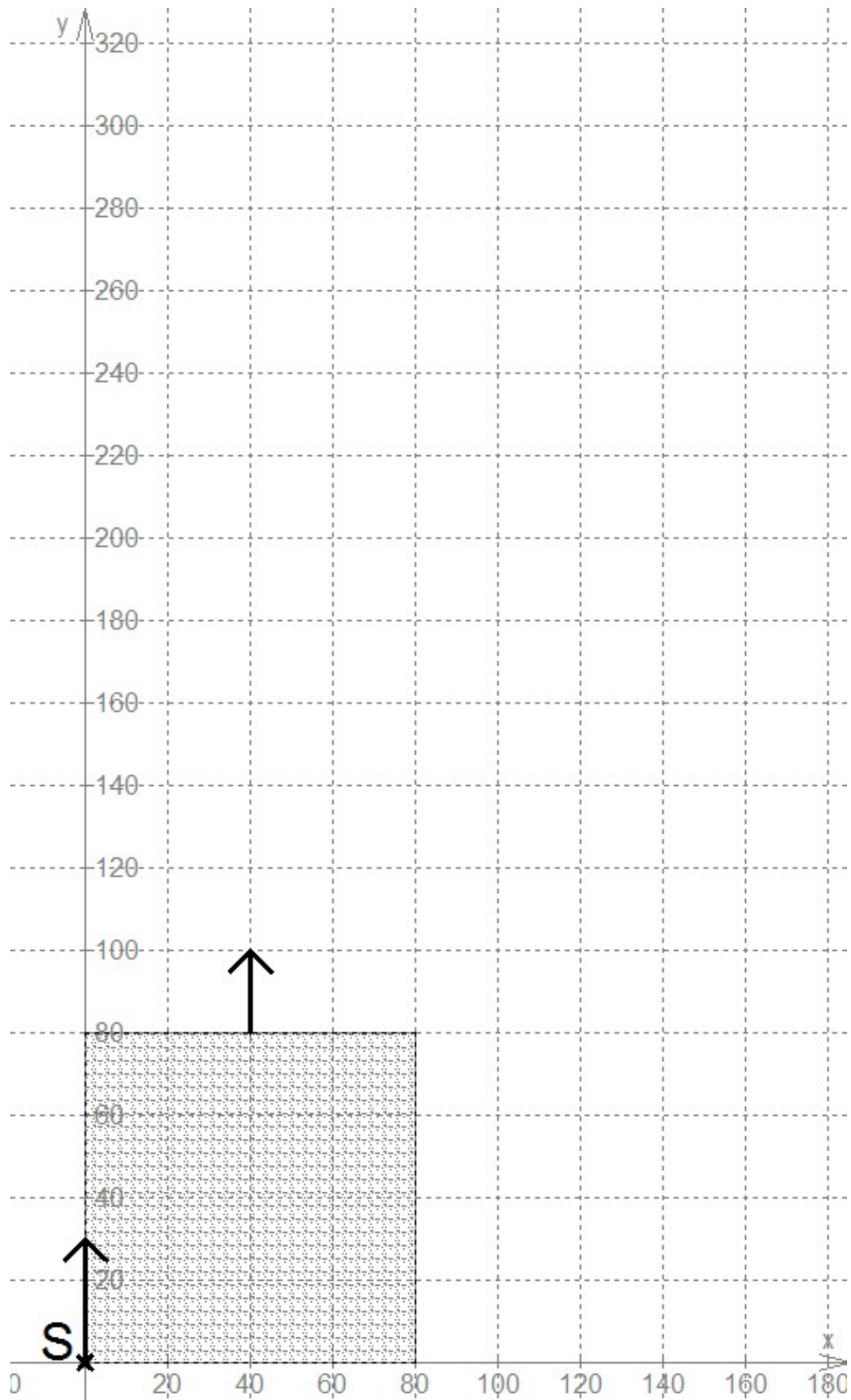
Ein Schäfer geht nun mit einer Geschwindigkeit von 5km/h um die Schafherde herum (er geht dabei immer genau am Rand der sich bewegenden Herde entlang).

(a) Wie lange benötigt der Schäfer für eine Umrundung?

(b) Zeichnen Sie in das Koordinatensystem auf dem nächsten Blatt den Weg des Schäfers in der Ebene ein, wenn er im Punkt  $S$  startet und die Schafherde einmal im Uhrzeigersinn umrundet.

# TAG DER MATHEMATIK 2018

zu Aufgabe OG2(b):



## TAG DER MATHEMATIK 2018

### Aufgabe OG3:

Die 12 Zahlen 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 sollen auf die Seiten zweier 6-seitiger Würfel verteilt werden. (Dabei soll auf jeder Würfelseite genau eine Zahl stehen. Allerdings darf sich auch mehrfach dieselbe Zahl auf demselben Würfel befinden.)

- (a) Die 12 Zahlen werden zunächst völlig zufällig auf die Würfelseiten verteilt. Dann wird mit beiden Würfeln gewürfelt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen genau 7 beträgt?

- (b) Nun sollen die 12 Zahlen so verteilt werden, dass anschließend die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, möglichst groß ist.

Wie groß kann die Wahrscheinlichkeit für die Summe 7 maximal werden?

Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie dabei auch eine mögliche Verteilung der 12 Zahlen auf die Würfel an, für die die Wahrscheinlichkeit der Summe 7 maximal wird.

- (c) Nun sollen die 12 Zahlen so verteilt werden, dass anschließend die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, möglichst klein ist.

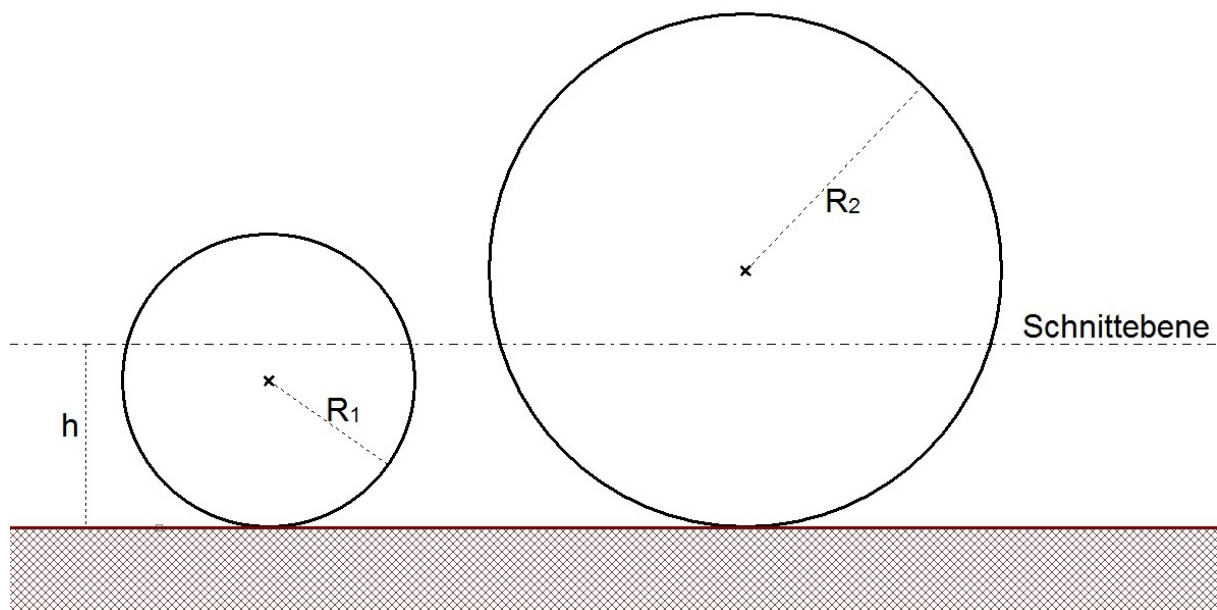
Wie klein kann die Wahrscheinlichkeit für die Summe 7 minimal werden?

Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie dabei auch eine mögliche Verteilung der 12 Zahlen auf die Würfel an, für die die Wahrscheinlichkeit der Summe 7 minimal wird.

### Aufgabe OG4:

Zwei Holzkugeln mit den Radien  $R_1, R_2$  (mit  $0 < R_1 < R_2$ ) liegen auf einer Tischplatte.

Beide Kugeln sollen im selben Abstand  $h$  von der Tischplatte waagrecht durchgeschnitten werden.



Wie ist dabei  $h$  (in Abhängigkeit von  $R_1, R_2$ ) zu wählen, damit die Summe der beiden entstehenden Schnittflächen maximal wird?

Bestimmen Sie auch den maximal möglichen Wert der Summe der beiden Schnittflächen (in Abhängigkeit von  $R_1, R_2$ ).

## TAG DER MATHEMATIK 2018

---

### Aufgabe OS1:

In einem Buch stehen im Durchschnitt 8 Buchstaben auf einem Quadratzentimeter Papierfläche. Das Buch hat (ohne den Einband) ein Volumen von  $0.02\text{m}^3$  bei einer Papierdicke von  $0.1\text{mm}$ .

Wieviele Buchstaben stehen in dem Buch?

---

### Aufgabe OS2:

Bei einem Quadrat  $\square ABCD$  mit Seitenlänge 1 wird

- eine Diagonale durch die Punkte  $E$  und  $F$  in 3 gleich lange Strecken geteilt,
- die andere Diagonale durch die Punkte  $G, M$  und  $H$  in 4 gleich lange Strecken geteilt (dabei ist  $M$  der Mittelpunkt des Quadrats).

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks  $\square EGFH$ .

---

### Aufgabe OS3:

Bei einem Radrennen hat Arne einen Vorsprung vor Bert.

Ein Streckenposten am Punkt  $X$  notiert, dass Bert genau 1 Minute später als Arne vorbeikommt. Beide fahren ab dem Punkt  $X$  zunächst mit der konstanten Geschwindigkeit von  $30\text{km/h}$  weiter.

Ab einem gewissen Zeitpunkt  $T$  setzt plötzlich starker Gegenwind ein und beide fahren ab dem Zeitpunkt  $T$  bis zum Ziel nur noch mit der Geschwindigkeit von  $25\text{km/h}$ .

Mit welchem Zeit Vorsprung kommt Arne vor Bert ins Ziel?

---

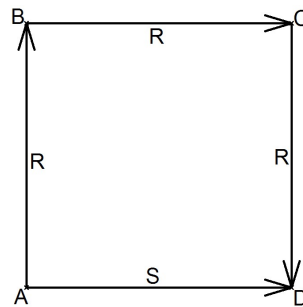
## TAG DER MATHEMATIK 2018

### Aufgabe OS4:

Gegeben sei ein Quadrat  $\square ABCD$  mit Seitenlänge  $1m$ .

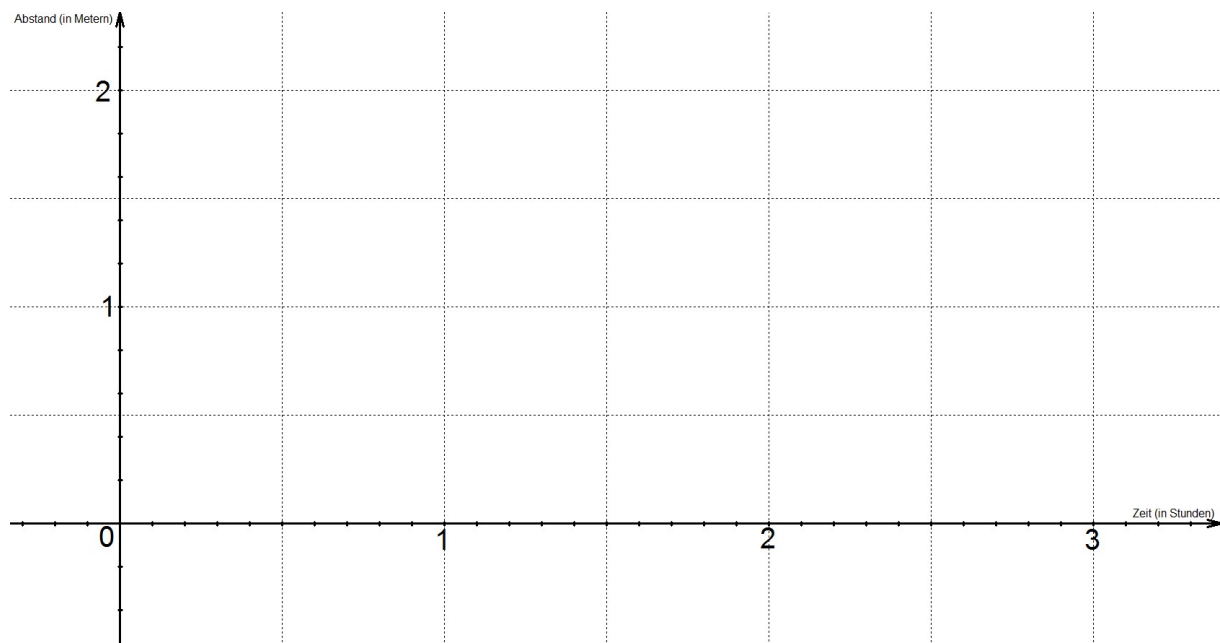
Im Punkt  $A$  befinden sich die Schnecke Siggie und die Rennschnecke Rudi.

Beide kriechen zum selben Zeitpunkt los, wobei sich Siggie auf gerader Strecke von  $A$  nach  $D$  und Rudi von  $A$  über  $B$  und  $C$  nach  $D$  bewegt.



Beide bewegen sich jeweils mit gleichbleibender Geschwindigkeit und treffen nach 3 Stunden genau gleichzeitig im Punkt  $D$  ein.

Skizzieren Sie in das folgende Koordinatensystem den Abstand der beiden Schnecken zueinander in Abhängigkeit von der Zeit.



Dabei sollte die Größenordnung der Funktionswerte stimmig sein, außerdem sollten Eigenschaften wie Monotonieverhalten, Krümmung und Symmetrie erkennbar sein.

## TAG DER MATHEMATIK 2018

### Aufgabe OS5:

Ein Dreieck  $\triangle ABC$  hat bei  $C$  einen rechten Winkel. Es gilt  $|\overline{AB}| = 5\text{cm}$  und  $|\overline{BC}| = 3\text{cm}$ .

Nun werden die Punkte

$$D \text{ auf } \overline{CA}, \quad E \text{ auf } \overline{AB}, \quad F \text{ auf } \overline{BC}$$

so gewählt, dass  $\square CDEF$  ein Quadrat ist. Bestimmen Sie die Seitenlänge dieses Quadrats.

### Aufgabe OS6:

Gegeben sei eine unbekannte Zahl  $b > 0$ . Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^2 - bx + 27$$

hat zwei Nullstellen, deren Abstand 3 beträgt. Bestimmen Sie die Zahl  $b$ .

### Aufgabe OS7:

Wir betrachten die Zahlen  $n_1, \dots, n_9$  die wie folgt definiert sind:

- $n_1 = 11 \dots 11$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Einsen besteht)
- $n_2 = 22 \dots 22$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Zweien besteht)
- $n_3 = 33 \dots 33$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Dreien besteht)
- $n_4 = 44 \dots 44$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Vieren besteht)
- $n_5 = 55 \dots 55$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Fünfen besteht)
- $n_6 = 66 \dots 66$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Sechsen besteht)
- $n_7 = 77 \dots 77$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Siebenen besteht)
- $n_8 = 88 \dots 88$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Achten besteht)
- $n_9 = 99 \dots 99$  (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Neunen besteht)

Sei nun  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$  die Summe dieser neun Zahlen.

Bestimmen Sie die Quersumme von  $n$ .

### Aufgabe OS8:

Ein Viereck wird durch die sich senkrecht schneidenden Diagonalen in vier Dreiecke unterteilt, von denen drei die folgenden Flächeninhalte haben:

$$6\text{cm}^2, \quad 10\text{cm}^2, \quad 12\text{cm}^2$$

Welchen Flächeninhalt kann das vierte Dreieck haben? Geben Sie alle Möglichkeiten an.