Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

ohne Lösungen

Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

Aufgabe OG1:

Zwei gerade Straßen treffen im rechten Winkel aufeinander. Eine Person A befindet sich auf einer der beiden Straßen genau 100 Meter von der Kreuzung entfernt. Eine weitere Person B befindet sich genau an der Kreuzung. Während sich A auf die Kreuzung zubewegt, bewegt sich B auf der anderen Straße von der Kreuzung weg. (Beide starten zeitgleich und bewegen sich jeweils mit konstanter Geschwindigkeit.)

(a) Wie nahe (Luftlinie) kommen A und B sich minimal, wenn die Geschwindigkeit von B genau $\frac{4}{3}$ der Geschwindigkeit von A beträgt ?

(b) Verallgemeinern Sie (a) wie folgt: Wie nahe kommen A und B sich minimal, wenn die Geschwindigkeit von B genau das c-fache der Geschwindigkeit von A beträgt ? (Beantworten Sie dies in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}^+$.)

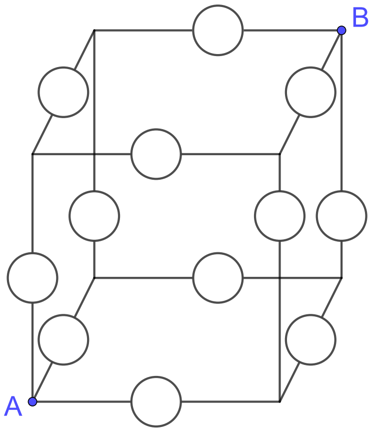
(c) Wie schnell ist B, wenn sich A mit 72km/h bewegt und der minimale Abstand von A und B genau 28 Meter beträgt?

Hinweis: Das Ergebnis (in km/h) ist ganzzahlig. Hilfreich ist die Gleichung $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Aufgabe OG2:
Bei einem Würfel gibt es 6 Wege vom Punkt A zum Punkt B, die jeweils über 3 Kanten des Würfels verlaufen. Ordnen Sie jeweils die angegebenen Zahlen so den 12 Kanten (jeweils eine Zahl pro Kante) zu, dass die Summe der den 3 Kanten eines Wegs zugeordneten Zahlen für jeden der 6 Wege diesselbe ist.

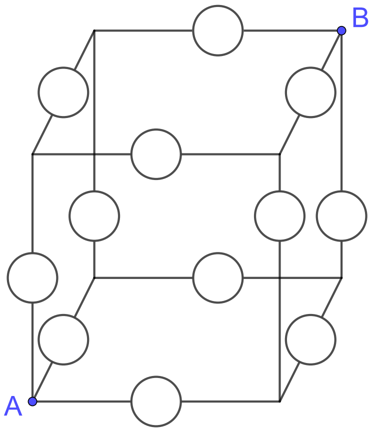
Anmerkung: Bei jedem Aufgabenteil kann der Wert der Summe ein anderer sein. Es gibt für jeden Aufgabenteil mehrere Lösungen. (Eine Lösung genügt jeweils.)

(a)



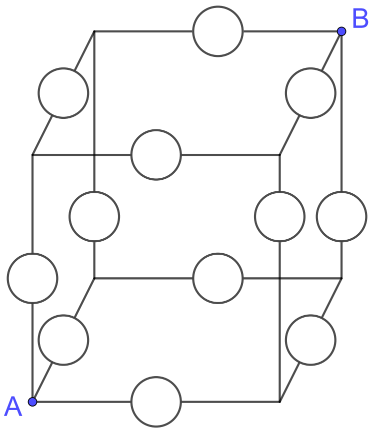
zuzuordnende Zahlen:
1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3

(b)



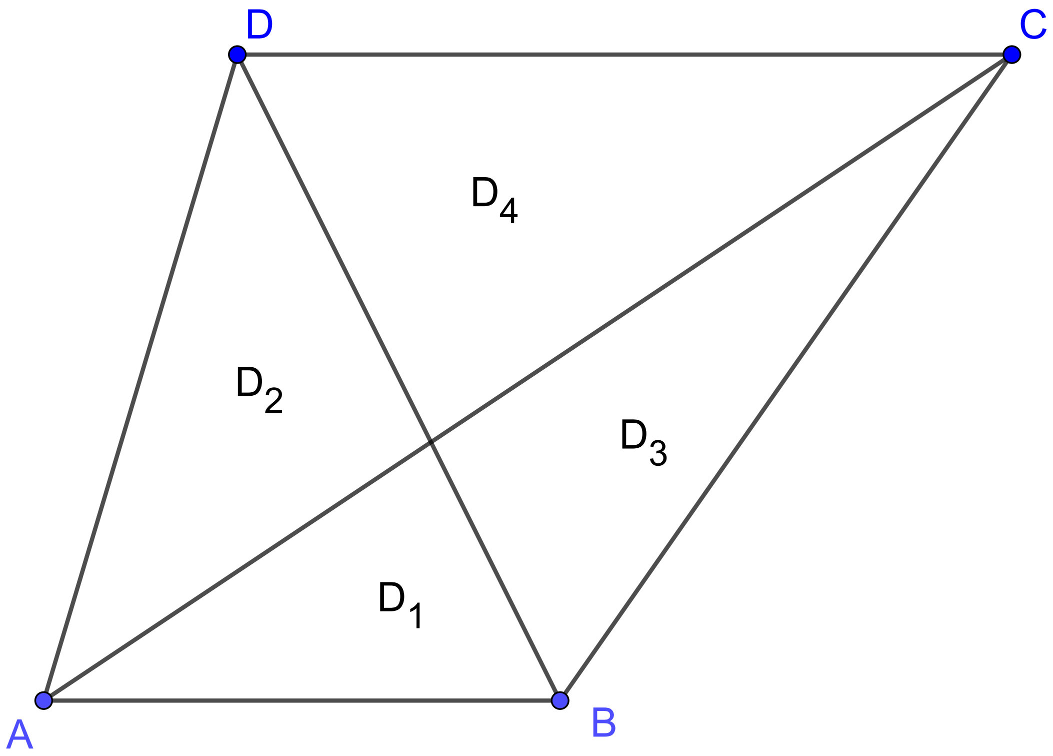
zuzuordnende Zahlen:
1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3

(c)



zuzuordnende Zahlen:
1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6

Aufgabe OG3:
Ein Trapez $\square ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke D_1, D_2, D_3, D_4 zerlegt (siehe Skizze).



Dabei gilt:

- Der Flächeninhalt des gesamten Trapezes $\square ABCD$ beträgt 1m^2.
- Der Flächeninhalt von D_1 beträgt 1600cm^2.

Bestimmen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke D_2, D_3 und D_4.

Aufgabe OG4:
In einer Lostrommel befinden sich a weiße und b schwarze Kugeln. Dabei gilt $a \leq b$ und $2 \leq a+b \leq 50$.

Wenn man zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen zieht, beträgt die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, genau 50%.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für a und b.

TAG DER MATHEMATIK 2021

Institut für Mathematik

Aufgabe OS1:

Hier sehen Sie eine Tabelle des kleines Einmaleins:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	17	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Was ist die Summe aller Zahlen in dieser Tabelle?

Aufgabe OS2:

Bestimmen Sie die vierstellige Zahl $n = abba$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (mit $a \neq 0$), die durch 36 aber nicht durch 72 teilbar ist.

Aufgabe OS3:

In einer Raute (Viereck mit 4 gleich langen Seiten) haben die Diagonalen die Längen $\sqrt{52}$ und $\sqrt{117}$.

(a) Bestimmen Sie die Seitenlänge der Raute.

(b) Bestimmen Sie die Höhe (=Abstand zweier gegenüberliegender Seiten) der Raute.

Aufgabe OS4:

(a) Knut macht ein Puzzle mit $10 \times 20 = 200$ Teilen (d.h. es gibt 10 Reihen mit je 20 Teilen).

Er baut die Teile nacheinander in das Puzzle ein und schreibt für jedes der 200 Teile auf, mit wievielen anderen (bereits eingebauten) Teilen er es verbindet.

Das erste Teil wird mitgezählt, dieses wird mit 0 bereits eingebauten Teilen verbunden. Die weiteren Teile werden mit 1 bis 4 bereits eingebauten Teilen verbunden.

Was ist der Durchschnitt aus den 200 Zahlen, die Knut hierbei erhält ?

(Geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch oder als Kommazahl an.)

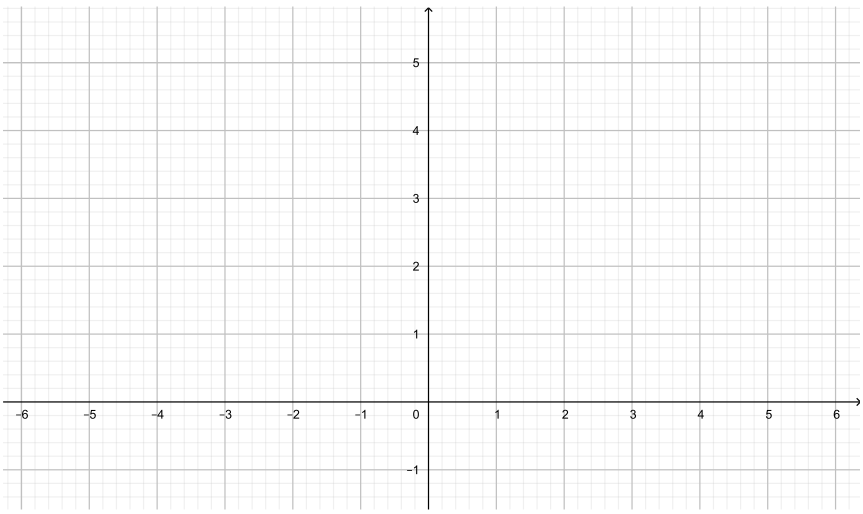
(b) Verallgemeinern Sie Teil (a) auf ein $m \times n$-Puzzle (mit $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig). Mit wievielen bereits eingebauten Teilen wird ein neues Teil im Durchschnitt (in Abhängigkeit von m und n) verbunden?

Aufgabe OS5:

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \Big|\,\big|\,|\,|x| - 1\,| - 1\,\big| - 1\,\Big|$$

(Dabei bezeichnet $|x|$ den Betrag einer reellen Zahl x.)



Aufgabe OS6:

Anna, Bert und Christian haben jeder einen 6-seitigen Würfel. Sie beschriften nun diese drei Würfel mit den Zahlen $1, \ldots, 18$ (jeweils eine Zahl auf jede Seite jedes Würfels, alle 18 Zahlen müssen verwendet werden). Anschließend würfeln alle drei gleichzeitig mit ihrem jeweiligen Würfel.

Dabei sollen die Wahrscheinlichkeiten, dass Anna bzw. Bert bzw. Christian die größte der drei Zahlen würfelt genau gleich (also $\frac{1}{3}$) sein.

Geben Sie eine Möglichkeit für die Verteilung der Zahlen an.

	Zahlen					
Annas Würfel						
Berts Würfel						
Christians Würfel						

Aufgabe OS7:

Gegeben seien zwei Punkte A, B in der Ebene. Ausgehend von der Strecke $\overline{AB}$ konstruiert man:

- ein regelmäßiges n-Eck mit den Eckpunkten $A, B, X_3, \ldots, X_n$
- ein regelmäßiges m-Eck mit den Eckpunkten $A, B, Y_3, \ldots, Y_m$

Diese beiden Vielecke liegen dabei auf unterschiedlichen Seiten der Geraden AB.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für n und m mit $3 \leq n \leq m$, so dass die Strecken $\overline{BX_3}$ und $\overline{BY_3}$ senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe OS8:

Gegeben ist eine natürliche Zahl n mit mindestens 3 Stellen (im Dezimalsystem). Sei m die Zahl, die entsteht, wenn man aus n die letzten beiden Ziffern wegstreicht.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Zahl n, für die $\frac{n}{m} = 107$ gilt.

(b) Was ist der kleinstmögliche Wert für $\frac{n}{m}$? Geben Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, für die $\frac{n}{m}$ minimal wird.

(c) Was ist der größtmögliche Wert für $\frac{n}{m}$? Geben Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, für die $\frac{n}{m}$ maximal wird.