Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

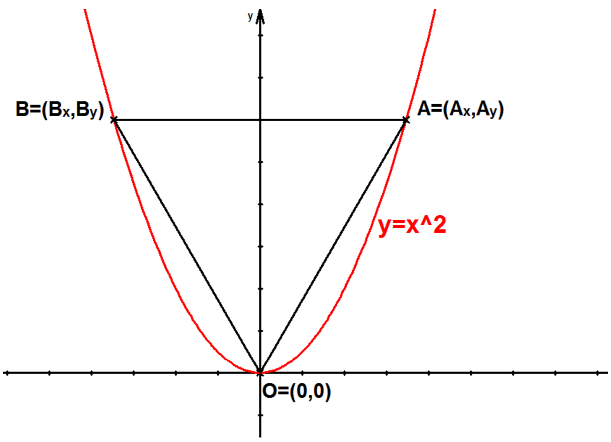
mit Lösungen

Aufgabe OE1:

Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte A, B, die beide auf dem Graphen der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegen und zusammen mit dem Koordinatenursprung $O = (0,0)$ ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Lösungsvorschlag:

Wir bezeichnen die Koordinaten der Punkte wie folgt: $A = (A_x, A_y),\ B = (B_x, B_y)$



Da A, B auf dem Graphen der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegen, gilt:

$$A_y = {A_x}^2 \quad \text{und} \quad B_y = {B_x}^2$$

Da die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ symmetrisch zur y-Achse und streng monoton fallend auf $]-\infty, 0]$ bzw. streng monoton wachsend auf $[0, \infty[$ ist, ist klar:

$$\text{Wegen } |\overline{AO}| = |\overline{BO}| \text{ folgt } |A_x| = |B_x|.$$

Da der Fall $A_x = B_x$ ausgeschlossen werden kann (dann wäre $A = B$ und das Dreieck entartet) folgt also: $-A_x = B_x$.

$$\text{Somit:} \quad A = (A_x, {A_x}^2),\ B = (-A_x, {A_x}^2)$$

Man berechnet nun:

$$|\overline{AO}|^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 = {A_x}^2 + {A_x}^4 \quad \text{und} \quad |\overline{AB}|^2 = (2A_x)^2 = 4 \cdot {A_x}^2$$

Wegen $|\overline{AO}| = |\overline{AB}|$ folgt:

$${A_x}^2 + {A_x}^4 = 4 \cdot {A_x}^2 \;\Leftrightarrow\; {A_x}^4 = 3 \cdot {A_x}^2 \;\overset{A_x \neq 0}{\Leftrightarrow}\; {A_x}^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; A_x = -\sqrt{3} \vee A_x = \sqrt{3}$$

Im Fall $A_x = \sqrt{3}$ ergibt sich:

$$\boxed{\text{Lösung: } A : \left(\sqrt{3}, 3\right),\ B : \left(-\sqrt{3}, 3\right)}$$

(Im Fall $A_x = -\sqrt{3}$ erhält man die gleichen Punkte mit vertauschten Bezeichnungen A, B.)

Aufgabe OE2:

Paul lädt seine Freunde zum Berliner-Essen ein. Auf dem Tisch stehen 3 Teller mit Berlinern:

- Auf dem 1.Teller sind 8 Quark-Berliner, 6 mit Nussfüllung und 10 mit Marmelade gefüllte Berliner.
- Auf dem 2.Teller sind 12 Quark-Berliner, 10 mit Nussfüllung und 8 mit Marmelade gefüllte Berliner.
- Auf dem 3.Teller sind eine unbekannte Zahl von Quark-Berlinern, 8 mit Nussfüllung und 12 mit Marmelade gefüllte Berliner.

Es ist Folgendes bekannt: Wenn man von jedem der drei Teller jeweils einen Berliner zufällig auswählt, ist die Wahrscheinlichkeit drei Berliner mit gleicher Füllung zu bekommen, genau $\frac{3}{25}$.

Wie viele Quark-Berliner sind auf dem 3.Teller?

Lösungsvorschlag:

Es bezeichne x die Anzahl der Quark-Berliner auf dem 3.Teller. Also:

	Quark-Berliner	Nuss-Berliner	Marmelade-Berliner	gesamt
1.Teller	8	6	10	24
2.Teller	12	10	8	30
3.Teller	x	8	12	$20 + x$

Damit beträgt

- die Wahrscheinlichkeit für drei Quark-Berliner: $\frac{8}{24} \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{x}{20+x} = \frac{2x}{15(20+x)}$
- die Wahrscheinlichkeit für drei Nuss-Berliner: $\frac{6}{24} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{8}{20+x} = \frac{2}{3(20+x)}$
- die Wahrscheinlichkeit für drei Marmelade-Berliner: $\frac{10}{24} \cdot \frac{8}{30} \cdot \frac{12}{20+x} = \frac{4}{3(20+x)}$

Insgesamt beträgt die Wahrscheinlichkeit für drei gleiche Berliner somit:

$$\frac{2x}{15(20+x)} + \frac{2}{3(20+x)} + \frac{4}{3(20+x)} = \frac{2x+30}{15(20+x)}$$

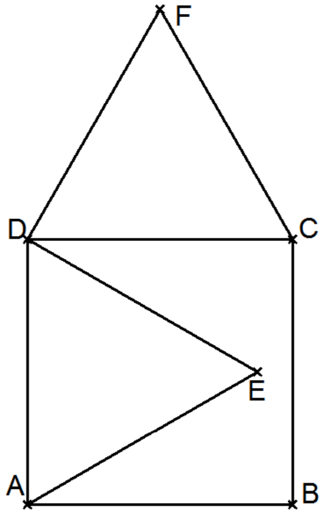
Also:

$$\frac{2x+30}{15(20+x)} = \frac{3}{25} \Leftrightarrow 2x+30 = \frac{9}{5}\cdot(20+x) \Leftrightarrow 2x+30 = 36+\frac{9}{5}\cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot x = 6 \Leftrightarrow x = 30$$

$\boxed{\text{Lösung: Es sind 30 Quark-Berliner auf dem 3.Teller.}}$

Aufgabe OE3:

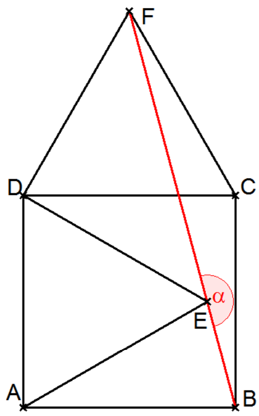
$\square ABCD$ ist ein Quadrat. $\triangle AED$ und $\triangle DCF$ sind gleichseitig.



Begründen Sie, dass die Punkte B, E und F auf einer Geraden liegen.

Lösungsvorschlag 1:

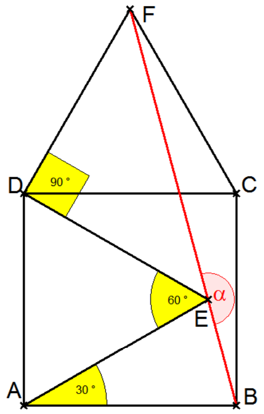
Es ist zu zeigen, dass der Winkel $\alpha = \measuredangle BEF$ ein 180°-Winkel ist.



Wir halten zunächst fest, dass alle Strecken in der Figur gleich lang sind. Es gilt:

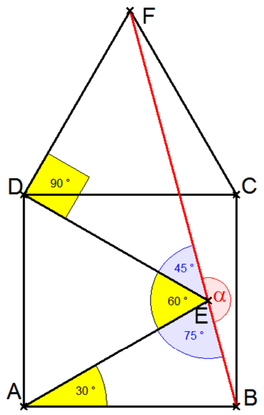
- $\measuredangle DEA = 60°$ (Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck)
- $\measuredangle BAE = \measuredangle BAD - \measuredangle DAE = 90° - 60° = 30°$
  ($\measuredangle BAD$: Innenwinkel im Quadrat, $\measuredangle EAD$: Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck)
- $\measuredangle EDF = \measuredangle EDC + \measuredangle CDF = \measuredangle ADC - \measuredangle ADE + \measuredangle CDF = 90° - 60° + 60° = 90°$
  ($\measuredangle ADC$: Innenwinkel im Quadrat, $\measuredangle ADE$: Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck, $\measuredangle CDF$: Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck)

Zwischenergebnis:



Nun folgt:

- $\measuredangle FED = \frac{180^\circ - \measuredangle EDF}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ ($\triangle FDE$ ist gleichschenklig)
- $\measuredangle AEB = \frac{180^\circ - \measuredangle BAE}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ ($\triangle EAB$ ist gleichschenklig)

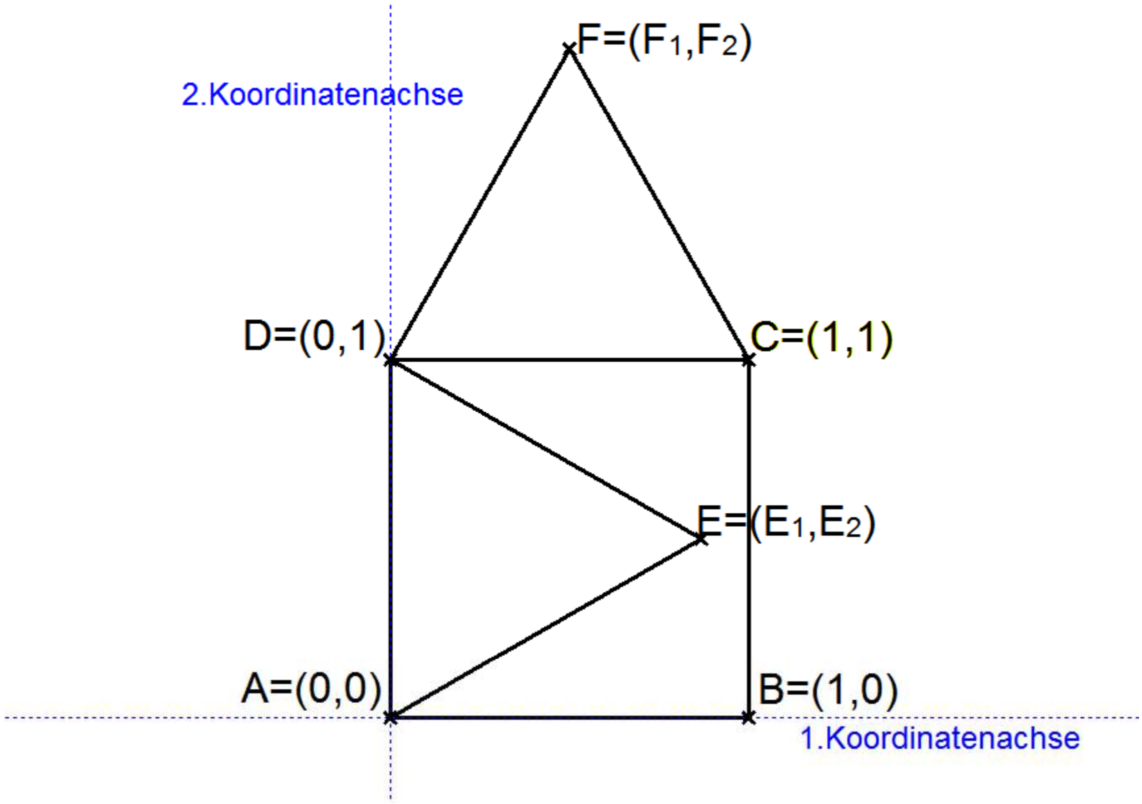


Also ist

$$\alpha = 360^\circ - (\measuredangle AEB + \measuredangle DEA + \measuredangle FED) = 360^\circ - (75^\circ + 60^\circ + 45^\circ) = 180^\circ$$

Lösungsvorschlag 2:

Wir betrachten ein Koordinatensystem mit Nullpunkt $A = (0,0)$ und Koordinatenachsen entlang der Geraden $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$. Die Skalierung der Achsen soll dabei so gewählt werden, dass $B = (1,0)$ und $D = (0,1)$ ist. Daraus ergibt sich $C = (1,1)$.



Wir bestimmen nun die Koordinaten von $E = (E_1, E_2)$ und $F = (F_1, F_2)$ in diesem Koordinatensystem:

- Es gilt $|\overline{AE}| = |\overline{DE}| = |\overline{AD}| = 1$. Dabei ist:

$$\begin{array}{rclcrcll} |\overline{AE}|^2 &=& {E_1}^2 + \quad {E_2}^2 & \Rightarrow & {E_1}^2 + \quad {E_2}^2 &=& 1 & \text{(I)} \\ |\overline{DE}|^2 &=& {E_1}^2 + (1-E_2)^2 & \Rightarrow & {E_1}^2 + (1-E_2)^2 &=& 1 & \text{(II)} \end{array}$$

Aus (II)-(I) ergibt sich:

$$(1-E_2)^2 - {E_2}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2E_2+{E_2}^2-{E_2}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2E_2+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_2 = \frac{1}{2}$$

Setzt man dies in (I) ein, so folgt:

$${E_1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad {E_1}^2 = \frac{3}{4} \quad \overset{E_1>0}{\Leftrightarrow} \quad E_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\text{Also:} \quad E = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)}$$

- Es gilt $|\overline{DF}| = |\overline{CF}| = |\overline{CD}| = 1$. Dabei ist:

$$\begin{array}{rclcrcll} |\overline{DF}|^2 & = & {F_1}^2 + (1-F_2)^2 & \Rightarrow & {F_1}^2 + (1-F_2)^2 & = & 1 & \text{(III)} \\ |\overline{CF}|^2 & = & (1-F_1)^2 + (1-F_2)^2 & \Rightarrow & (1-F_1)^2 + (1-F_2)^2 & = & 1 & \text{(IV)} \end{array}$$

Aus (IV)-(III) ergibt sich:

$$(1-F_1)^2 - {F_1}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2F_1+{F_1}^2-{F_1}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2F_1+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = \frac{1}{2}$$

Setzt man dies in (III) ein, so folgt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-F_2)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-F_2)^2 = \frac{3}{4} \quad \overset{F_2>1}{\Leftrightarrow} \quad 1-F_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad F_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\text{Also:} \quad F = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Es bleibt nun zu zeigen, dass die Punkte

$$B = (1,0) \quad , \quad E = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

auf einer Geraden liegen.

Dies kann man beispielsweise durch Nachrechnen der folgenden Bedingung zeigen:

$$\underbrace{\frac{E_2 - B_2}{E_1 - B_1}}_{\text{Steigung der Geraden durch } E \text{ und } B} = \underbrace{\frac{F_2 - B_2}{F_1 - B_1}}_{\text{Steigung der Geraden durch } F \text{ und } B}$$

Wegen

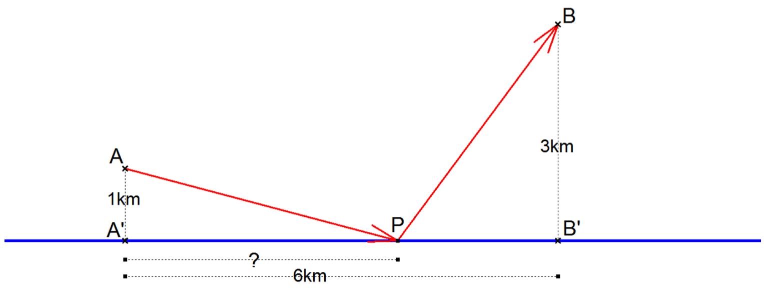
$$\frac{E_2 - B_2}{E_1 - B_1} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} \qquad \text{und} \qquad \frac{F_2 - B_2}{F_1 - B_1} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 1} = -2 - \sqrt{3}$$

kann die zu zeigende Gleichheit wie folgt äquivalent umgeformt werden:

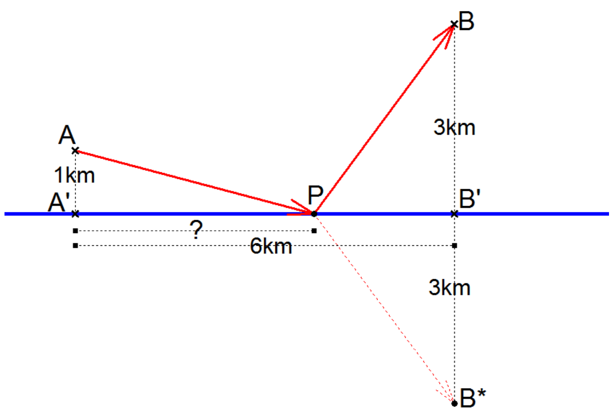
$$\begin{aligned} \frac{E_2 - B_2}{E_1 - B_1} = \frac{F_2 - B_2}{F_1 - B_1} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -2 - \sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow \quad 1 = -\underbrace{\left(\sqrt{3}+2\right) \cdot \left(\sqrt{3}-2\right)}_{=\sqrt{3}^2 - 2^2 = -1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1 \quad \text{(wahre Aussage)} \end{aligned}$$

Aufgabe OG1:
Ein Forscher befindet sich im Punkt A, 1km entfernt von einem völlig geradlinigen Fluss. Er möchte im Fluss eine Wasserprobe nehmen und sie zu der Station im Punkt B bringen. Der Punkt B liegt 6 km weiter flussabwärts als A und ist 3 km vom Fluss entfernt.

Wie groß muss die Länge der Strecke $\overline{A'P}$ gewählt werden, damit der Gesamtweg, den der Forscher zurücklegen muss, minimal wird?

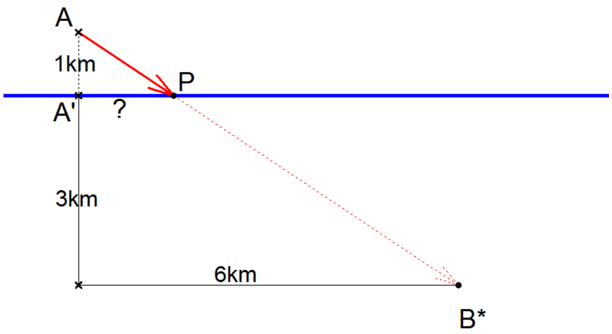


Lösungsvorschlag 1:
Für einen beliebig gewählten Punkt P auf der Strecke $\overline{A'B'}$ ändert sich die Gesamtlänge des Weges nicht, wenn man B durch den Punkt B^* ersetzt, den man erhält, wenn man B an der Gerade durch A' und B' spiegelt.



Gesamtweg: $\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{PB}\right| = \left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{PB^*}\right|$

Da die kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten eine Strecke ist, ist (zur Minimierung des Gesamtweges) P offenbar so zu wählen, dass A, P und B^* auf einer Geraden liegen.



Nach den Strahlensätzen folgt:

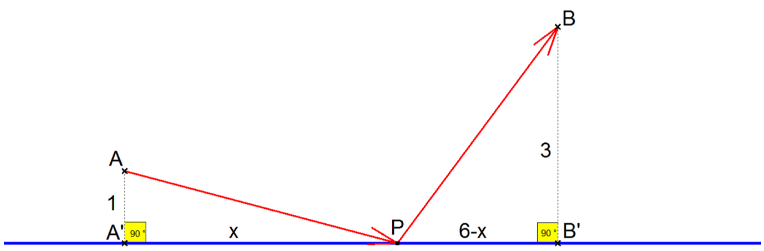
$$\frac{|\overline{A'P}|}{1\text{km}} = \frac{6\text{km}}{4\text{km}} \quad \Rightarrow \quad |\overline{A'P}| = 1\text{km} \cdot \frac{6\text{km}}{4\text{km}} = 1,5\text{km}$$

$\boxed{\text{Lösung: } P \text{ muss also in einer Entfernung von } 1,5\text{km vom Punkt } A' \text{ gewählt werden.}}$

Lösungsvorschlag 2:

Wir schreiben $x = |\overline{A'P}|$. Dabei ist offenbar nur $x \in [0, 6]$ (Angaben in km) sinnvoll.

Die Dreiecke $\triangle AA'P$ und $\triangle BA'P$ sind rechtwinklig.



Nach dem Satz des Pytagoras folgt daher für den Gesamtweg $W(x)$:

$$W(x) = |\overline{AP}| + |\overline{PB}| = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(6-x)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 12x + 45}$$

Gesucht ist also das Minimum der Funktion:

$$W:[0,6]\to\mathbb{R},\ W(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-12x+45}$$

$$\text{Ableitung von } W:\quad W'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+45}}$$

Also: $W'(x)=0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow && \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+45}}\\
&\Leftrightarrow && x\cdot\sqrt{x^2-12x+45}=(6-x)\cdot\sqrt{x^2+1}\\
&\overset{\text{beide Seiten}>0}{\Leftrightarrow} && x^2\cdot\left(x^2-12x+45\right)=\left(36-12x+x^2\right)\cdot\left(x^2+1\right)\\
&\Leftrightarrow && x^4-12x^3+45x^2=36x^2+36-12x^3-12x+x^4+x^2\\
&\Leftrightarrow && 8x^2+12x-36=0\\
&\Leftrightarrow && x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0\\
&\Leftrightarrow && x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{16}\\
&\Leftrightarrow && \left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{81}{16}\\
&\Leftrightarrow && x+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\ \vee\ x+\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}\\
&\Leftrightarrow && x=\frac{3}{2}\ \vee\ x=-3\\
&\overset{x\in[0,6]}{\Leftrightarrow} && x=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Die Funktion W kann ihr Minimum also nur an den Stellen 0 oder 6 (Randstellen) oder $\frac{3}{2}$ (Nullstelle der Ableitung) annehmen. Die Randstellen kommen jedoch hier nicht in Frage, denn dies hieße, dass der Weg des Forschers über den Punkt A' bzw. über den Punkt B' verliefe, was offenbar keinen Sinn macht.$^{(*)}$

Also wird der Gesamtweg für $\left|\overline{A'P}\right|=x=\frac{3}{2}=1,5$.

$\boxed{\text{Lösung: } P \text{ muss also in einer Entfernung von } 1,5\text{km vom Punkt } A' \text{ gewählt werden.}}$

Zu $(*)$: Formal lässt sich dies auch durch eine Monotonieuntersuchung von W oder einen Vergleich der Funktionswerte $W(0), W(6)$ und $W\left(\frac{3}{2}\right)$ begründen.

Aufgabe OG2:

Beim Werfen zweier gewöhnlicher 6-seitiger Würfel (mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$) sind die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Augensummen nicht gleich groß. (Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 7 zu würfeln größer als die die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 2 zu würfeln, denn die Augensumme 7 kann auf mehrere Arten zustande kommen.)

Wie kann man zwei 6-seitige Würfel so beschriften, dass nur die Augensummen $1, \ldots, 12$ vorkommen können und diese alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten?

Hinweis: Dabei dürfen die beiden Würfel unterschiedlich beschriftet werden. Es darf auch die Zahl 0 benutzt werden und es ist auch erlaubt, die gleiche Zahl mehrmals auf demselben Würfel zu verwenden.

Lösungsvorschlag:

1.Würfel (W1):	$1, 2, 3, 4, 5, 6$
2.Würfel (W2):	$0, 0, 0, 6, 6, 6$

Dann ergeben sich die folgenden Augensummen:

W1 / W2	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12

Jede der Augensummen $1, \ldots, 12$ kommt genau 3-mal in dieser Tabelle vor und hat daher die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Aufgabe OG3:

In einer Kasse befinden sich nur 2-Cent-, 5-Cent- und 10-Cent-Münzen. Insgesamt sind es genau 50 Münzen im Gesamtwert von $1,37$ Euro.

Wieviele Münzen von jeder Sorte befinden sich in der Kasse?

Lösungsvorschlag:

Bezeichungen:
x : Anzahl der 2-Cent-Münzen
y : Anzahl der 5-Cent-Münzen
z : Anzahl der 10-Cent-Münzen

Bekannt ist:	x	$+y$	$+z$	$=$	50	(I)
	$2x$	$+5y$	$+10z$	$=$	137	(II)
Daraus folgt:		$3y$	$+8z$	$=$	37	(II) $-2\cdot$ (I)

Die Gleichung $3y + 8z = 37$ hat die Lösung $(y, z) = (7, 2)$.
Dies ist die einzige Lösung dieser Gleichung mit $y, z \in \mathbb{N}_0$, wovon man sich durch Ausprobieren überzeugen kann:

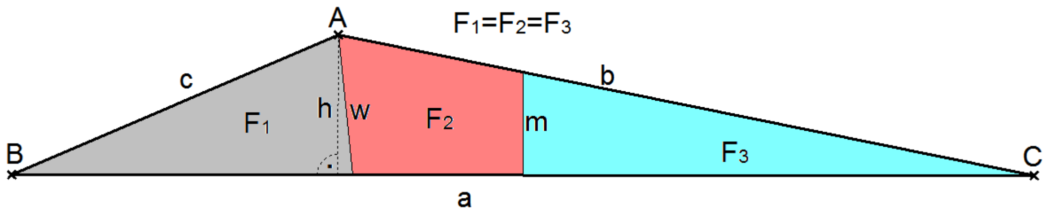
- Für $z = 0$ ergibt sich $3y = 37$. Dies ist in $\mathbb{N}_0$ nicht lösbar.
- Für $z = 1$ ergibt sich $3y = 29$. Dies ist in $\mathbb{N}_0$ nicht lösbar.
- Für $z = 2$ ergibt sich $3y = 21$. Dies hat die Lösung $y = 7 \in \mathbb{N}_0$.
- Für $z = 3$ ergibt sich $3y = 13$. Dies ist in $\mathbb{N}_0$ nicht lösbar.
- Für $z = 4$ ergibt sich $3y = 5$. Dies ist in $\mathbb{N}_0$ nicht lösbar.
- Für $z \geq 5$ ist $8z > 37$. Daher kann die Gleichung $3y + 8z = 37$ nicht mit einer nichtnegativen Zahl y gelöst werden.

$$\text{Einsetzen in (I)} \quad \Rightarrow \quad x + 7 + 2 = 50 \;\Leftrightarrow\; x = 41$$

Lösung: Es sind 41 2-Cent-Münzen, 7 5-Cent-Münzen und 2 10-Cent-Münzen in der Kasse.

Aufgabe OG4:

$\triangle ABC$ wird durch die Winkelhalbierende w durch den Winkel α und die Mittelsenkrechte m zur Strecke $\overline{BC}$ in drei gleich große Flächen geteilt.

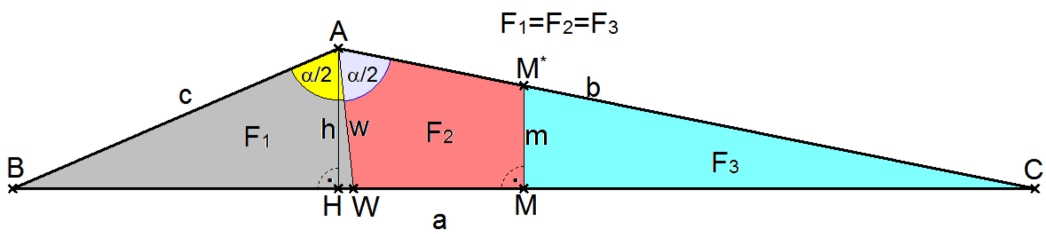


Berechnen Sie die Seitenlängen a und b in Abhängigkeit von c.

Lösungsvorschlag:

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

M	:	Mittelpunkt der Seite a
M^*	:	Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m und der Seite b
W	:	Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch α und der Seite a
H	:	Fußpunkt der Höhe zur Basis a



1.) Es gilt:

$$F_1 = F(\triangle ABW) = \frac{c \cdot w \cdot \sin(\alpha/2)}{2} \quad \text{und} \quad F_2{+}F_3 = F(\triangle AWC) = \frac{b \cdot w \cdot \sin(\alpha/2)}{2}$$

Wegen $F_2 + F_3 = 2F_1$ folgt:

$$\frac{b \cdot w \cdot \sin(\alpha/2)}{2} = 2 \cdot \frac{c \cdot w \cdot \sin(\alpha/2)}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 2c$$

2.) Es gilt:

$$F_3 = F(\triangle CMM^*) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left|\overline{CM}\right|}_{=\frac{a}{2}} \cdot m = \frac{am}{4} \quad \text{und} \quad F_1{+}F_2{+}F_3 = F(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{ah}{2}$$

Wegen $F_1 + F_2 + F_3 = 3F_3$ folgt:

$$\frac{ah}{2} = 3 \cdot \frac{am}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{m} = \frac{3}{2}$$

Nun folgt (Strahlensatz):

$$\left|\overline{CH}\right| = \left|\overline{CM}\right| \cdot \frac{h}{m} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \cdot a \quad \text{und somit} \quad \left|\overline{BH}\right| = a - \left|\overline{CH}\right| = a - \frac{3}{4} \cdot a = \frac{1}{4} \cdot a$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Pytagoras in } \triangle BHA: & \left(\frac{a}{4}\right)^2 & + & h^2 & = c^2 & \text{(I)} \\ \text{Pytagoras in } \triangle AHC: & \left(\frac{3a}{4}\right)^2 & + & h^2 & = b^2 \overset{1.)}{=} 4c^2 & \text{(II)} \end{array}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun:

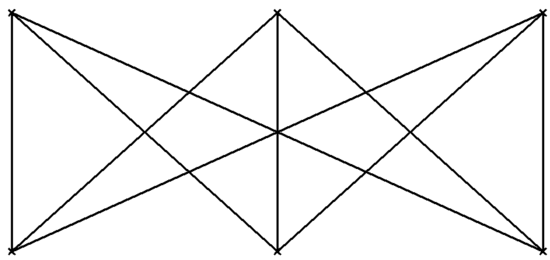
$$\text{(II)} - \text{(I)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 4c^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot a^2 = 3c^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{6} \cdot c$$

$$\boxed{\text{Lösung: } b = 2c, \ a = \sqrt{6} \cdot c}$$

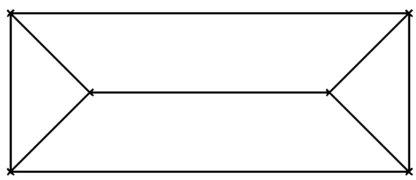
Aufgabe OS1: Zeichnen Sie 6 Punkte in der Ebene und Verbindungslinien zwischen einigen der Punkte. Dabei soll jeder Punkt mit genau 3 anderen Punkten direkt durch eine Linie verbunden sein. (Die Linien dürfen sich dabei auch schneiden.)

Lösungsvorschläge:

- Man kann die Punkte in zwei Dreiergruppen aufteilen und dann jeden Punkt einer Gruppe mit jedem Punkt der anderen verbinden.



- Man kann die Punkte in zwei Dreiergruppen aufteilen und dann alle Punkte einer Gruppe untereinander verbinden. Anschließend verbindet man noch jeden Punkt einer Gruppe mit einem zugeordneten Punkt der anderen Gruppe.



(Abgesehen davon, dass man die Punkte noch anders anordnen kann, gibt es keine weiteren Lösungen.)

Aufgabe OS2: Kann man auch 7 Punkte in der Ebene so durch Linien miteinander verbinden, dass jeder Punkt mit genau 3 anderen Punkten direkt verbunden ist? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Lösungsvorschlag:

$\boxed{\text{Lösung: Dies ist nicht möglich.}}$

Begründung:

Von jedem der 7 Punkte müssten 3 Linien abgehen. Also gäbe es insgesamt $3 \cdot 7 = 21$ “Linienabgänge“ von den Knoten. Da jede Linie aber genau 2 solche Abgänge hat, müssten es insgesamt genau $21 : 2 = 10,5$ Linien sein. Dies kann nicht sein, denn die Anzahl der Linien muss eine natürliche Zahl sein.

Aufgabe OS3: Anne, Beate und Charlie laufen Runden auf dem Sportplatz. Sie laufen unterschiedlich schnell, aber jeder läuft mit konstanter Geschwindigkeit. Anne stellt fest:

1.) Immer wenn ich 7 Runden gelaufen bin, überhole ich Beate.

2.) Immer wenn ich 10 Runden gelaufen bin, überhole ich Charlie.

Wieviel Runden muss Charlie laufen, um Beate zu überholen?

Lösungsvorschlag 1:
Wir bezeichnen die Geschwindigkeiten von Anne, Beate und Charlie mit v_A, v_B und v_C.

- Da Anne 7 Runden läuft, während Beate 6 Runden läuft, gilt: $v_A = \frac{7}{6} \cdot v_B$.
- Da Anne 10 Runden läuft, während Charlie 9 Runden läuft, gilt: $v_A = \frac{10}{9} \cdot v_C$.

Daraus folgt (Gleichsetzen):

$$\frac{7}{6} \cdot v_B = v_A = \frac{10}{9} \cdot v_C \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{6} \cdot v_B = \frac{63}{60} \cdot v_B = \frac{21}{20} \cdot v_B$$

Also läuft Charlie 21 Runden, während Beate 20 Runden läuft.

Lösung: Charlie muss 21 Runden laufen, um Beate zu überholen.

Lösungsvorschlag 2:
In der Zeit in der Anne 70 Runden läuft,

- läuft Beate 60 Runden. (Anne überholt Beate dabei 10-mal.)
- läuft Charlie 63 Runden. (Anne überholt Charlie dabei 7-mal.)

Also überholt Charlie bei 63 gelaufenden Runden Beate genau 3-mal, d.h. immer nach 21 Runden.

Lösung: Charlie muss 21 Runden laufen, um Beate zu überholen.

Aufgabe OS4: Eine 4-stellige natürliche Zahl ist von der Form $a00a$ mit einer unbekannten Ziffer $a \in \{1, \dots, 9\}$.

Begründen Sie, dass die Zahl durch $7, 11$ und 13 teilbar sein muss.

Lösungsvorschlag:
Es ist $a00a = a \cdot 1001$. Also ist $a00a$ durch 1001 teilbar.

Weil 1001 durch $7, 11$ und 13 teilbar ist (es ist $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$), muss $a00a$ ebenfalls durch $7, 11$ und 13 teilbar sein.

Aufgabe OS5: Bei einem Fussballturnier spielen 6 Mannschaften gegeneinander. Dabei spielt jede Mannschaft einmal gegen jede andere Mannschaft. Bei einem Sieg erhält man 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage 0 Punkte. Hier ist die Endtabelle:

Platz	Mannschaft	Punkte
1.	Team A	11
2.	Team B	9
3.	Team C	8
4.	Team D	7
5.	Team E	4
6.	Team F	2

Wieviele Unentschieden hat es insgesamt gegeben?

Lösungsvorschlag:
Es bezeichne x die Anzahl der Unentschieden.

Wenn jede der 6 Mannschaften gegen jede andere spielt, gibt es insgesamt

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

Spiele.

Da bei einem Unentschieden 2 Punkte vergeben werden (einen für jede der beiden beteiligten Mannschaften) und bei einem Sieg 3 Punkte vergeben werden, werden insgesamt:

$$x \cdot 2 + (15 - x) \cdot 3 = 45 - x$$

Punkte vergeben.

Die Mannschaften haben aber insgesamt:

$$11 + 9 + 8 + 7 + 4 + 2 = 41$$

Punkte erzielt.

$$\text{Also:} \quad 45 - x = 41 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

$$\boxed{\text{Lösung: Es hat insgesamt 4 Unentschieden gegeben.}}$$

Aufgabe OS6: Welches ist die kleinste natürliche Zahl, für die gilt:

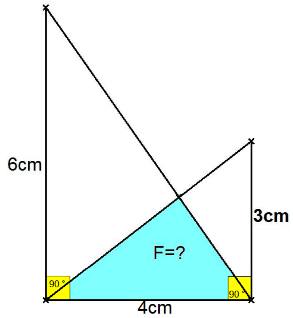
- Wenn man sie durch 2 teilt, bleibt der Rest 1.
- Wenn man sie durch 3 teilt, bleibt der Rest 2.
- Wenn man sie durch 4 teilt, bleibt der Rest 3.
- Wenn man sie durch 5 teilt, bleibt der Rest 4.
- Wenn man sie durch 6 teilt, bleibt der Rest 5.

Lösungsvorschlag:
Ist n die gesuchte Zahl, so muss $n+1$ die kleinste Zahl sein, die durch $2, 3, 4, 5$ und 6 teilbar ist. Es gilt also:

$$n + 1 = \text{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 60 \quad \Rightarrow \quad n = 59$$

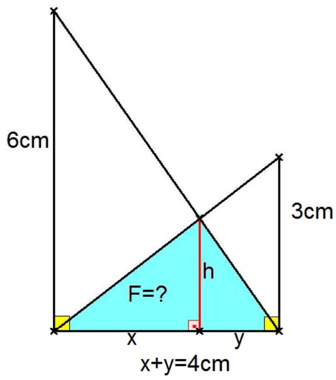
$$\boxed{\text{Lösung: } 59}$$

Aufgabe OS7: Zwei rechtwinklige Dreiecke haben eine gemeinsame Kathete der Länge 4cm. Die andere Kathete hat beim ersten Dreieck die Länge 6cm und beim zweiten Dreieck die Länge 3cm.



Wie groß ist die Schnittfläche der beiden Dreiecke?

Lösungsvorschlag 1:
Die Schnittfläche ist ebenfalls ein Dreieck. Wir bezeichnen die Höhe dieses Dreiecks (zur Basis, die der gemeinsamen Seite aller drei Dreiecke entspricht) mit h und die entsprechenden Höhenabschnitte mit x bzw. y.



Offenbar gilt $x + y = 4\text{cm}$. Nach den Strahlensätzen gilt außerdem:

$$\frac{x}{4\text{cm}} = \frac{h}{3\text{cm}} \quad \text{und} \quad \frac{y}{4\text{cm}} = \frac{h}{6\text{cm}}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man:

$$1 = \frac{x}{4\text{cm}} + \frac{y}{4\text{cm}} = \frac{h}{3\text{cm}} + \frac{h}{6\text{cm}} = \frac{h}{2\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad h = 2\text{cm}$$

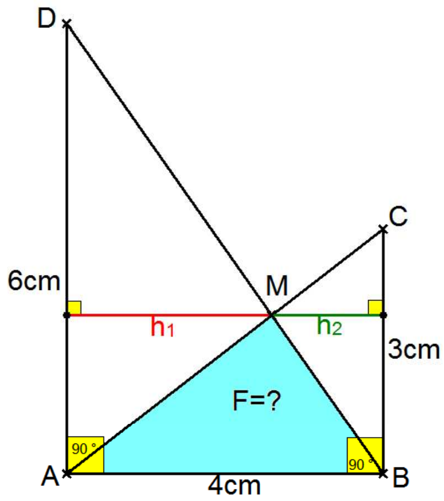
Damit ist der Flächeninhalt der Schnittfläche: $F = \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$

$\boxed{\text{Lösung: Der gesuchte Flächeninhalt beträgt } 4\text{cm}^2}$

Lösungsvorschlag 2:

Wir bezeichnen die Endpunkte der gemeinsamen Kathete der beiden Ausgangsdreiecke mit A und B, ihre weiteren Eckpunkte mit C und D und den Schnittpunkt der beiden Hypotenusen mit M (siehe Skizze unten).

Außerdem sei h_1 die Höhe zur Grundseite $\overline{DA}$ im $\triangle DAM$ und h_2 die Höhe zur Grundseite $\overline{BC}$ im $\triangle BCM$.



Nach den Strahlensätzen gilt:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{6\text{cm}}{3\text{cm}} = 2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 2 \cdot h_1 \ (*)$$

Daraus folgt:

$$4\text{cm} = h_1 + h_2 \overset{(*)}{=} 3h_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{4}{3}\text{cm}$$

Nun ergibt sich:

$$F = F(\triangle ABM) = F(\triangle ABC) - F(\triangle BCM) = \frac{1}{2}\cdot 4\text{cm}\cdot 3\text{cm} - \frac{1}{2}\cdot 3\text{cm}\cdot \frac{4}{3}\text{cm} = 6\text{cm}^2 - 2\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$$

Lösung: Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 4cm^2

Aufgabe OS8: Welche der folgenden beiden Zahlen x, y ist größer?

$$x = \sqrt{1001} + \sqrt{1004} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{1002} + \sqrt{1003}$$

(Begründen Sie Ihre Antwort.)

Lösungsvorschlag 1:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
x < y \quad & \Leftrightarrow && \sqrt{1001} + \sqrt{1004} < \sqrt{1002} + \sqrt{1003} \\
& \overset{\text{beide Seiten } >0}{\Leftrightarrow} && \left(\sqrt{1001} + \sqrt{1004}\right)^2 < \left(\sqrt{1002} + \sqrt{1003}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow && 1001 + 2 \cdot \sqrt{1001 \cdot 1004} + 1004 < 1002 + 2 \cdot \sqrt{1002 \cdot 1003} + 1003 \\
& \Leftrightarrow && \sqrt{1001 \cdot 1004} < \cdot \sqrt{1002 \cdot 1003} \\
& \overset{\text{beide Seiten } >0}{\Leftrightarrow} && 1001 \cdot 1004 < 1002 \cdot 1003 \\
& \Leftrightarrow && (1000 + 1) \cdot (1000 + 4) < (1000 + 2) \cdot (1000 + 3) \\
& \Leftrightarrow && 1000^2 + 5 \cdot 1000 + 4 < 1000^2 + 5 \cdot 1000 + 6 \\
& \Leftrightarrow && 4 < 6 \quad \text{(wahre Aussage)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Lösung: } y \text{ ist die Größere der beiden Zahlen.}}$$

Lösungsvorschlag 2:
Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(t) = \sqrt{t}$ ist streng rechtsgekrümmt (konkav), denn es ist $f''(t) = -\frac{t^{3/2}}{4} < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$. Also ist f' streng monoton fallend und folglich ist: $f'(t) > f'(s)$ für alle $t \in [1001, 1002]$ und alle $s \in [1003, 1004]$.

Also steigt f im Intervall $[1001, 1002]$ stärker$^{(*)}$ als im Intervall $[1003, 1004]$ und somit folgt:

$$f(1002) - f(1001) > f(1004) - f(1003) \quad \Rightarrow \underbrace{f(1001) + f(1004)}_{=x} < \underbrace{f(1002) + f(1003)}_{=y}$$

$$\boxed{\text{Lösung: } y \text{ ist die Größere der beiden Zahlen.}}$$

Zu $(*)$: Noch präziser lässt sich dies mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung formulieren. Nach diesem Satz existieren Stellen $t_0 \in]1001, 1002[$ und $s_0 \in]1003, 1004[$ mit:

$$\frac{f(1002) - f(1001)}{1002 - 1001} = f'(t_0) \quad \text{und} \quad \frac{f(1004) - f(1003)}{1004 - 1003} = f'(s_0)$$

Daraus folgt nun: $\quad f(1002) - f(1001) = f'(t_0) > f'(s_0) = f(1004) - f(1003)$