UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Institut für Mathematik

Vorkurs Mathematik

Teil A – Mathematische Objekte und Beweismethoden

von

Dr. Stephan Schmitz

Institut für Mathematik

Fachbereich 7: Natur- und Umweltwissenschaften

Universität Koblenz-Landau, Campus Landau

Basierend auf dem Skript von Dr. Dominik Faas

Vieles von dem, was wir hier im Vorkurs machen wird in den Lehrveranstaltungen, vor allem den Fachwissenschaftlichen Grundlagen noch genauer und detaillierter gemacht, vor allem in der Aussagenlogik. In diesem Zeitrahmen wird daher einiges vereinfacht dargestellt, so dass für den Anfang des Studiums eine Grundlage besteht.

Mathematik ist eine Sprache. Dazu gehören Vokabeln, die Mathematischen Objekte; Grammatik, wie diese Objekte verknüpft werden können und das Sprechen, wie können wir rechnen?

Teil I.

Mathematische Objekte

1. Zahlen

Frage 1.1.
Welche Arten von Zahlen bzw. welche Zahlmengen kennen Sie? **(mögliche) Antwort:**

- Natürliche Zahlen: $1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{(Menge der natürlichen Zahlen)} \\ \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{(Menge der natürlichen Zahlen und der 0)} \end{aligned}$$

  $\cup$ ist dabei die Vereinigung von Mengen, die alle Elemente beider Mengen enthält

- Ganze Zahlen: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{(Menge der ganzen Zahlen)}$$

- Rationale Zahlen: $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\} \quad \text{(Menge der rationalen Zahlen)}$$

  Dies ist eine vereinfachte Darstellung, vgl. FWG.

- Reelle Zahlen, Irrationale Zahlen, $\setminus$ heißt dabei „ohne“:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} && \text{(Menge der reellen Zahlen)} \\ &\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} && \text{(Menge der irrationalen Zahlen)} \end{aligned}$$

Frage 1.2.
Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Zahlmengen?

(mögliche) Antwort:

$$\text{Es gilt:} \quad \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Die Mengen sind ineinander enthalten aber nicht gleich

- Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.
- Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.
- Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.
- Jede irrationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.

Aufgabe 1.3.

(a) *Nennen Sie einige:*

- *natürliche Zahlen.*
- *ganze Zahlen, die keine natürlichen Zahlen sind.*
- *rationale Zahlen, die keine ganzan Zahlen sind.*
- *reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind.*

(b) *Nennen Sie eine Eigenschaft*

- *die jede der Zahlmengen* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *hat.*
- *die* $\mathbb{Z}$ *hat, aber nicht* $\mathbb{N}$.
- *die* $\mathbb{Q}$ *hat, aber nicht* $\mathbb{Z}$.
- *die* $\mathbb{R}$ *hat, aber nicht* $\mathbb{Q}$.
- *die* $\mathbb{N}$ *hat, aber nicht* $\mathbb{R}$.

(mögliche) Antwort:

(a)

- $1, 2, 3, \dots, 765, \dots \in \mathbb{N}$
- $0, -1, -2, -3, \dots, -43, \dots \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
- $\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{7},\ -\frac{11}{8} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2}$ (später), $\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \pi,\ e,\ \pi - 88,\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(b)

- Innerhalb der Zahlmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ gibt es eine Addition:
  Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist auch $x + y \in \mathbb{N}$.
  Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ ist auch $x + y \in \mathbb{Z}$.
  Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ ist auch $x + y \in \mathbb{Q}$.
  Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist auch $x + y \in \mathbb{R}$.
- In $\mathbb{Z}$ gibt es eine Subtraktion, in $\mathbb{N}$ jedoch nicht:
  Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ ist auch $x - y \in \mathbb{Z}$.
  FALSCH IST ABER: Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist auch $x - y \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$ ist dicht, $\mathbb{Z}$ jedoch nicht:
  Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ gibt es ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.
  FALSCH IST ABER: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < b$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $a < x < b$.
- Man kann in $\mathbb{R}$ aus allen positiven Zahlen die Wurzel ziehen, in $\mathbb{Q}$ jedoch nicht:
  Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ (Menge der Reellen Zahlen, die > 0 sind) existiert ein (eindeutiges) $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b^2 = a$.
  FALSCH IST ABER: Für alle $a \in \mathbb{Q}^+$ existiert ein (eindeutiges) $b \in \mathbb{Q}^+$ mit $b^2 = a$.
- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, aber keine kleinste reelle Zahl:
  Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N \leq x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.
  FALSCH IST ABER: Es gibt ein $N \in \mathbb{R}$, so dass $N \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- In $\mathbb{N}$ hat jede Zahl einen Nachfolger, in $\mathbb{R}$ jedoch nicht.:
  Für alle $a \in \mathbb{N}$ gibt es ein $b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$, wobei es aber kein $x \in \mathbb{N}$ mit $a < x < b$ gibt.
  FALSCH IST ABER: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, wobei es aber kein $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ gibt.

2. Verknüpfungen von Zahlen

Frage 2.1.
Was ist eine Verknüpfung (von Zahlen)?

(mögliche) Antwort: Eine Verknüpfung kann wie folgt erklärt werden:

- Der Verknüpfung wird ein Symbol $*$ zugeordnet. (Stern $*$ ist hier nur als Platzhalter zu verstehen, in den meisten Fällen wird hier ein allgemein bekanntes Symbol stehen.)
- Zwei Zahlen x, y sollen verknüpft werden, das Ergebnis soll wieder eine Zahl sein. (x, y sind hier ebenfalls Platzhalter für Zahlen, mehr dazu später (Variablen).)
- Es wird festgelegt aus welchen Zahlmengen, die Zahlen x, y kommen dürfen (eventuell sind Einschränkungen nötig) und in welcher Zahlmenge dann das Ergebnis liegen kann.
- Falls notwendig wird genau erklärt (festgelegt, definiert), wie man ausgehend von x, y auf das Ergebnis der Verknüpfung kommt. Dabei wird das Ergebnis der Verknüpfung mit $x * y$ notiert.

Frage 2.2.

Welche Verknüpfungen von Zahlen kennen Sie? (Geben Sie auch an, aus welcher Zahlenmenge die zu verknüpfenden Zahlen kommen dürfen und in welcher Zahlmenge dann das Ergebnis liegen kann.)

(mögliche) Antwort:

Symbol	erlaubte Zahlen	Ergebnis	
$+$	$x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$	$x + y \in \mathbb{N}$	Addition
$+$	$x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$	$x + y \in \mathbb{Z}$	
$+$	$x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}$	$x + y \in \mathbb{Q}$	
$+$	$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$	$x + y \in \mathbb{R}$	
$-$	$x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$	$x - y \in \mathbb{Z}$	Subtraktion
$-$	$x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}$	$x - y \in \mathbb{Q}$	
$-$	$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$	$x - y \in \mathbb{R}$	
$\cdot$	$x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$	$x \cdot y \in \mathbb{N}$	Multiplikation
$\cdot$	$x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$	$x \cdot y \in \mathbb{Z}$	
$\cdot$	$x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}$	$x \cdot y \in \mathbb{Q}$	
$\cdot$	$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$	$x \cdot y \in \mathbb{R}$	
$:$	$x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$x : y \in \mathbb{Q}$	Division
$:$	$x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	$x : y \in \mathbb{Q}$	
$:$	$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x : y \in \mathbb{R}$	
(hoch)	$x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$	$(x \text{ hoch } y) = x^y \in \mathbb{N}$	Potenz
(hoch)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y \in \mathbb{Z}$	$(x \text{ hoch } y) = x^y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	

Oftmals (aber nicht immer) liegen x, y und auch $x * y$ in derselben Menge (einer sogenannten **Grundmenge**). Man spricht dann von einer Verknüpfung **auf** der entsprechenden Grundmenge.

Frage 2.3.

Gibt es auch Verknüpfungen anderer Objekte (als Zahlen)? Nennen Sie Beispiele.

(mögliche) Antwort: Ja, beispielsweise:

- Schnitt $\cap$ und Vereinigung $\cup$ zwischen Mengen (Für zwei Mengen A, B sind $A \cap B$ und $A \cup B$ ebenfalls Mengen.)
- Addition $+$ zwischen Vektoren (Für zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist $u + v \in \mathbb{R}^n$ ebenfalls ein Vektor.)
- das Skalarprodukt von Vektoren (Für zwei Vektoren u, v ist $u \cdot v$ eine Zahl (kein Vektor).)
- „und“ $\wedge$ und „oder“ $\vee$ zwischen Aussagen (Für zwei Aussagen a, b sind $a \wedge b$ und $a \vee b$ ebenfalls Aussagen.)
- Verkettung $\circ$ „Kringel“ zwischen Funktionen (Für geeignete Funktionen f, g ist $g \circ f$ wieder eine Funktion.)

Frage 2.4.

Kann man Verknüpfungen miteinander kombinieren?

(mögliche) Antwort: Ja. Man muss dabei Klammern setzen (oder geltende Konventionen beachten). Beispiele:

- $(3+5)\cdot 2 = 8\cdot 2 = 16$ Klammer zuerst abarbeiten,
  $3+5\cdot 2 = 3+(5\cdot 2) = 3+10 = 13$ „Punkt vor Strich“ Konvention
- $4:2\cdot 8+5 = ((4:2)\cdot 8)+5 = (2\cdot 8)+5 = 16+5 = 21$
- $2+7+5 = (2+7)+5 = 9+5 = 14$ bzw. $2+7+5 = 2+(7+5) = 14$
  Hierbei ist nur deshalb keine Klammer notwendig, weil bei beiden möglichen Klammerungen dasselbe Ergebnis herauskommt, dies ist wegen des Assoziativgesetzes $(a+b)+c = a+(b+c)$ so.
- $4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^9 = 262144 \quad , \quad (4^3)^2 = 64^2 = 4096$
  Konvention: Potenztürme von oben nach unten abarbeiten.
- $(A\cap B)\cup C$ bzw. $A\cap(B\cup C)$ für Mengen A, B, C

Im Zweifel können Klammern gesetzt werden um die richtige Leseart klar zu stellen, z.B. $4^{(3^2)} \neq (4^3)^2$ was nun wirklich gemeint ist.

Frage 2.5.

Welche Eigenschaften haben Ihnen bekannte Verknüpfungen (exemplarisch)?

(mögliche) Antwort:

- $+$ und $\cdot$ sind (auf jeder Grundmenge von Zahlen) kommutativ, d.h.:

$$\text{Es gilt } \underline{\text{immer}}: \quad x + y = y + x \text{ und } x \cdot y = y \cdot x$$

$$\begin{aligned} \text{Genauer formuliert:} \quad & \underline{\text{Für alle}}\ x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt:} \quad x + y = y + x \\ & \underline{\text{Für alle}}\ x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt:} \quad x \cdot y = y \cdot x \end{aligned}$$

- $-$ und $:$ sind nicht kommutativ.
- Für die Verknüpfung $+$ gibt es ein sogenanntes "Neutrales Element" $N \in \mathbb{R}$. Dieses erfüllt $N + x = x$ und auch $x + N = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Natürlich ist $N = 0$ gemeint.)
  Genauer formuliert:

$$\underline{\text{Es gibt}} \text{ ein } N \in \mathbb{R} \text{ , so dass } \underline{\text{für alle}}\ x \in \mathbb{R} \text{ gilt:} \quad x + N = x \text{ und } N + x = x$$

- Für $-$ und $:$ gibt es kein Neutrales Element.
- $\cdot$ und $+$ erfüllen zusammen das Distributivgesetz, d.h.:

$$\text{Es gilt } \underline{\text{immer}}: \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

  Genauer formuliert: $\underline{\text{Für alle}}\ a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

- $\cdot$ und $-$ erfüllen zusammen das Distributivgesetz („Ausmultiplizieren“).

Anmerkung: Man verwendet häufig die "Quantoren" $\boxed{\forall\text{: für alle}}$ und $\boxed{\exists\text{: es gibt}}$.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ : \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Aufgabe 2.6.

Gegeben ist jeweils eine Grundmenge und eine Verknüpfung auf dieser Grundmenge. Entscheiden Sie, ob die Verknüpfung kommutativ, assoziativ ist, ob ein neutrales Element existiert:

Grundmenge	*Verknüpfung*	*kommutativ?*	*assoziativ?*	*existiert ein neutrales Element? (falls ja, angeben)*
$\mathbb{R}$	$+$			
$\mathbb{R}$	$-$			
$\mathbb{R}$	$\cdot$			
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *Potenzmenge* *(Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$)*	$\cap$			
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *(Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$)*	$\cup$			
$\mathbb{R}^3$ *(Menge der Vektoren im Raum)*	$+$ *(Vektoraddition)*			
$\mathbb{Z}$	$*$ *definiert durch* $x * y := x + y - 7\ (x, y \in \mathbb{Z})$			
$\mathbb{Q}$	$\bullet$ *definiert durch* $x \bullet y := \frac{x+y}{2}\ (x, y \in \mathbb{Q})$			
$\mathbb{N}$	$\uparrow$ *definiert durch* $x \uparrow y := kgV(x, y)\ (x, y \in \mathbb{N})$			
$\mathbb{R}$	$\triangledown$ *definiert durch* $x \triangledown y := \min(x, y)\ (x, y \in \mathbb{R})$			

Bei einer Definition wie $x \bullet y := \frac{x+y}{2}$ steht das was neu definiert wird auf der Seite mit dem Doppelpunkt.

Prüfen Sie,diese Eigenschaften für selbst ausgedachte Verknüpfungen.

(mögliche) Antwort:

Grundmenge	Verknüpfung	kommutativ?	assoziativ?	existiert ein neutrales Element? (falls ja, bitte angeben)
$\mathbb{R}$	$+$	ja	ja	ja: 0
$\mathbb{R}$	$-$	nein	nein	nein
$\mathbb{R}$	$\cdot$	ja	ja	ja: 1
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$)	$\cap$	ja	ja	ja: $\mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$)	$\cup$	ja	ja	ja: $\{\}$ (leere Menge)
$\mathbb{R}^3$ (Menge der Vektoren im Raum)	$+$ (Vektoraddition)	ja	ja	ja: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Nullvektor)
$\mathbb{Z}$	$*$ definiert durch $x * y := x + y - 7\ (x, y \in \mathbb{Z})$	ja	ja	ja: 7
$\mathbb{Q}$	$\bullet$ definiert durch $x * y := \frac{x+y}{2}\ (x, y \in \mathbb{Q})$	ja	nein	nein
$\mathbb{N}$	$\uparrow$ definiert durch $x \uparrow y := \text{kgV}(x, y)\ (x, y \in \mathbb{N})$	ja	ja	ja: 1
$\mathbb{R}$	$\triangledown$ definiert durch $x \triangledown y := \min(x, y)\ (x, y \in \mathbb{R})$	ja	ja	nein

Frage 2.7.

Kann es sein, dass es für eine Verknüpfung $*$ auf einer Grundmenge M mehrere (mindestens 2) neutrale Elemente gibt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(mögliche) Antwort: Nein, denn falls $e, f \in M$ beides neutrale Elemente für $*$ sind, dann gilt:

$$e \overset{(f \text{ neutral})}{=} e * f \overset{(e \text{ neutral})}{=} f$$

3. Relationen zwischen Zahlen

Frage 3.1.
Was ist eine Relation zwischen Zahlen?

(mögliche) Antwort: Eine Relation kann wie folgt erklärt werden:

- Der Relation wird ein Symbol $\sim$ zugeordnet. ($\sim$ ist hier nur als Platzhalter zu verstehen, in den meisten Fällen wird hier ein allgemein bekanntes Symbol stehen.)
- Zwei Zahlen x, y sollen mittels der Relation untersucht/verglichen werden werden, dabei gibt es stets nur zwei Möglichkeiten:

  $x \sim y$ kann gültig (d.h. wahr) sein <u>oder</u> $x \sim y$ kann ungültig (d.h. falsch) sein

  Anders gesagt: $x \sim y$ ist eine **Aussage** (entweder eine wahre oder eine falsche Aussage, je nachdem, welche Werte man für x und y einsetzt) [Eigentlich Aussage**form**→ später].
- Es muss festgelegt sein, aus welchen Grundmengen, die Zahlen x, y kommen dürfen.
- Es wird genau erklärt (festgelegt, definiert), wie man ausgehend von x, y entscheiden kann, ob $x \sim y$ gültig ist.

Frage 3.2.

Welche Relationen zwischen Zahlen kennen Sie?

(mögliche) Antwort:

- Auf den Grundmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind die Relationen $=$, $>$, $<$, $\leq$, $\geq$, $\neq$ bekannt.

  Beispielsweise: $-8 = -8, \quad 3 < \sqrt{10}, \quad -7 \geq -8, \quad 0 \neq -2$ sind wahre Aussagen
  $4 = -4, \quad 8 > 8, \quad \sqrt{99} \leq \sqrt{98}, \quad 3 \neq 3$ sind falsche Aussagen

- Auf $\mathbb{N}$ (auch auf $\mathbb{Z}$) gibt es die Teilbarkeitsrelation, die durch das Symbol $|$ dargestellt wird. Dabei ist $a \mid b$ genau dann gültig, wenn a ein Teiler von b ist. (Dies kann man mithilfe einer Definition noch präziser formulieren.)

  $$\text{Beispielsweise}: \quad 4 \mid 20, \quad 26 \mid 78, \quad 7 \mid 7 \quad \text{aber} \quad 3 \nmid 10, \quad 44 \nmid 22$$

  (Dabei steht $a \nmid b$ (natürlich) dafür, dass $a \mid b$ nicht gültig ist.)

Frage 3.3.
Gibt es auch Relationen zwischen anderen Objekten (nicht Zahlen)? Können Sie Beispiele nennen?

(mögliche) Antwort: Ja, beispielsweise:

- $\subseteq, \subsetneq$ und $\supseteq, \supsetneq$ (und auch $=$ bzw. $\neq$) zwischen Mengen (mehr dazu später)
- $\parallel$ („parallel") und $\perp$ („senktecht auf", „orthogonal zu") zwischen Geraden oder Vektoren
- ...

Relationen werden allgemeiner und genauer in den FWG behandelt.

Frage 3.4.

Kann man Relationen miteinander kombinieren?

(mögliche) Antwort: keine offensichtliche standard Möglichkeit. Man müsste aus zwei Relationen eine neue basteln, und man kann aber darüber diskutieren ob/ wie das geht und ob das sinnvoll währe

Frage 3.5.
Welche Eigenschaften haben Ihnen bekannte Relationen (exemplarisch)?

(mögliche) Antwort: Beispielsweise:

- $\leq$ ist reflexiv, d.h. jedes Element ist zu sich selbst in Relation: $x \leq x$ ist immer wahr
  Präziser: $\forall x \in \mathbb{R}: \; x \leq x$
- $\leq$ ist transitiv, d.h. ist x in Relation zu y und dieses wieder in Relation zu z, dann ist auch x in Relation zu z:

  Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ beide wahr sind, dann ist auch $x \leq z$ wahr.

  Präziser: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: [(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z]$
- $<$ ist transitiv, aber nicht reflexiv
- $\neq$ ist weder transitiv, noch reflexiv, aber symmetrisch, d.h. Ist x in Relation zu y, so auch y in Relation zu x:

  Wenn $x \neq y$ wahr ist, dann ist auch $y \neq x$ wahr.

  Präziser: $\forall x, y \in \mathbb{R}: [x \neq y \Rightarrow y \neq x]$, „$\Rightarrow$“ steht dabei für eine Folgerung
- ...

Aufgabe 3.6.

Gegeben ist im Folgenden jeweils eine Grundmenge und eine Relation auf dieser Grundmenge. Entscheiden Sie, ob die Relation reflexiv bzw. symmetrisch bzw. transitiv ist:

Grundmenge	*Relation*	*reflexiv?*	*symmetrisch?*	*transitiv?*
$\mathbb{R}$	$=$			
$\mathbb{R}$	$<$			
$\mathbb{R}$	$\leq$			
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *(Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$)*	$\subseteq$ *(ist eine Teilmenge von)*			
$\mathbb{N}$	$\mid$ *(ist ein Teiler von)*			
$\mathbb{G}$ *(Menge aller Geraden in der Ebene)*	$\parallel$			
$\mathbb{G}$ *(Menge aller Geraden in der Ebene)*	$\perp$			
$\mathbb{Z}$	$\equiv$ *wobei $x \equiv y$ genau dann gelten soll, wenn $x + y$ gerade ist*			
$\mathbb{R}$	$<<$ *wobei $x << y$ genau dann gelten soll, wenn $x < y - 2$*			
$\mathbb{V}$ *(Menge aller Teilnehmer des Vorkurses)*	$\sim$ *wobei $x \sim y$ genau dann gelten soll, wenn x und y dieselbe Schule besucht haben*			
$\mathbb{V}$ *(Menge aller Teilnehmer des Vorkurses)*	$\heartsuit$ *wobei $x \heartsuit y$ genau dann gelten soll, wenn x und y bei Facebook befreundet sind*			

Denken Sie sich weitere Relationen aus und prüfen Sie, ob diese reflexiv bzw. symmetrisch bzw. transitiv sind.

(mögliche) Antwort:

Grundmenge	Relation	reflexiv?	symmetrisch?	transitiv?
$\mathbb{R}$	$=$	ja	ja	ja
$\mathbb{R}$	$<$	nein	nein	ja
$\mathbb{R}$	$\leq$	ja	nein	ja
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$)	$\subseteq$ (ist eine Teilmenge von)	ja	nein	ja
$\mathbb{N}$	$\mid$ (ist ein Teiler von)	ja	nein	ja
$\mathbb{G}$ (Menge aller Geraden in der Ebene)	$\parallel$	ja	ja	ja
$\mathbb{G}$ (Menge aller Geraden in der Ebene)	$\perp$	nein	ja	nein
$\mathbb{Z}$	$\equiv$ wobei $x \equiv y$ genau dann gelten soll, wenn $x + y$ gerade ist	ja	ja	ja
$\mathbb{R}$	$<<$ wobei $x << y$ genau dann gelten soll, wenn $x < y - 2$	ja	nein	ja
$\mathbb{V}$ (Menge aller Teilnehmer des Vorkurses)	$\sim$ wobei $x \sim y$ genau dann gelten soll, wenn x und y dieselbe Schule besucht haben	ja	ja	ja(?)
$\mathbb{V}$ (Menge aller Teilnehmer des Vorkurses)	$\heartsuit$ wobei $x \heartsuit y$ genau dann gelten soll, wenn x und y bei Facebook befreundet sind	nein(?)	ja	nein

Frage 3.7. *Kann es sein, dass eine Relation $\sim$ auf einer Grundmenge M symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist?*

D.h. für alle $x, y, z \in M$ müsste aus $x \sim y$ auch $y \sim x$ folgen und aus $x \sim y$ und $y \sim z$ eben $x \sim z$, aber es gibt (mindestens) ein $x_0 \in M$ für das $x_0 \sim x_0$ falsch ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(mögliche) Antwort: Ja, aber nur, falls es ein Element $x \in M$ gibt, dass mit keinem Element in Relation steht. Beispielsweise könnte $M = \{a, b, c\}$ sein und es könnte gelten

$a \sim a$ wahr	$a \sim b$ wahr	$a \sim c$ falsch
$b \sim a$ wahr	$b \sim b$ wahr	$b \sim c$ falsch
$c \sim a$ falsch	$c \sim b$ falsch	$c \sim c$ falsch

Falls $x \in M$ in Relation mit mindestens einem $y \in M$ steht, dann gilt $x \sim y$ und damit (da $\sim$ symmetrisch ist) auch $y \sim x$. Wegen $x \sim y$ und $y \sim x$ folgt aus der Transitivität, dass dann auch $x \sim x$ gelten muss. Damit die Relation nicht reflexiv ist muss es also ein element geben was mit keinem in Relation steht (hier das c).

4. Aussagen

Zu diesem Teil speziell gibt es in den Fachwissenschaftlichen Grundlagen noch viel mehr.

Frage 4.1.
Was ist eine Aussage (im Sinne der Mathematik bzw. der Logik)?

(mögliche) Antwort: Aussagen sind Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert (d.h. entweder "wahr" oder "falsch") zuordnen kann. (vgl: Wikipedia)

Stolpersteine bei Aussagen im Alltagssprachgebrauch und im mathematischen Sinne werden in FWG näher untersucht. Klassiker: „Salat oder Gemüse?“ in der Mensa.

Aufgabe 4.2.

Nennen Sie Beispiele von wahren und von falschen Aussagen.

(mögliche) Antwort:

- Wahre Aussagen:
  - -) 97 ist eine Primzahl.
  - -) $3 + 4 = 6 + 1$
  - -) $20 \mid 140$
  - -) $744.2 > 743.9$ (häufig wird Punkt statt Komma geschriebeb)
  - -) Jedes Quadrat ist ein Rechteck.
  - -) Es gibt eine negative reelle Zahl, deren Quadrat 7 ist.
  - -) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
  - -) Landau hat mehr als 25000 Einwohner.
- Falsche Aussagen:
  - -) $91 - 12 = 103$
  - -) $744.2 \leq 743.9$
  - -) $12 \nmid 36$
  - -) Jedes Rechteck ist ein Quadrat.
  - -) Es gibt eine rationale Zahl, deren Quadrat 7 ist.
  - -) Landau hat höchstens 30000 Einwohner.
- Aussagen, von denen niemand weiß, ob sie wahr oder falsch sind:
  - -) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
  - -) Jede gerade Zahl, die größer oder gleich 4 ist, kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.
  - -) Am 1.5.2022 wird es in Landau schneien.

  Hierbei handelt es sich trotzdem um Aussagen, denn sie können ja nur entweder wahr oder falsch sein.
- Keine Aussagen mit einem eindeutigen Wahrheitswert:
  - -) Der Mond ist genau 400000 km von der Erde entfernt.
  - -) $x > 34$ (so etwas wird in der FWG zur Aussageform, etwas was durch einsetzen von Konkreten Fällen zu einer Aussage wird. Häufig wird im Sprachgebrauch zwischen Aussage und Aussageform nicht unterschieden.)
  - -) Ich habe heute Nacht gut geschlafen.

Bei nicht-mathematischen Aussagen gerät man leicht in eine “Grauzone“. Es ist dann nicht mehr unbedingt klar, ob es sich überhaupt um Aussagen handelt. Die Mathematik zeichnet sich dadurch aus, dass alle Aussagen präzise formuliert werden können.

Frage 4.3.
Kennen Sie Verknüpfungen zwischen Aussagen? Erklären Sie sie gegebenenfalls.

(mögliche) Antwort:

- $\wedge$ (sprich: "und") ist eine Verknüpfung zwischen Aussagen, denn zu zwei Aussagen a und b ist $a \wedge b$ wiederum eine Aussage. Dabei gilt:

$$a \wedge b \text{ ist wahr, } \quad \underline{\text{falls}} \quad a \text{ und } b \text{ beide wahr sind}$$

- $\vee$ (sprich: "oder") ist eine Verknüpfung zwischen Aussagen, denn zu zwei Aussagen a und b ist $a \vee b$ wiederum eine Aussage. Dabei gilt:

$$a \vee b \text{ ist wahr, } \quad \underline{\text{falls}} \quad \text{(mindestens) eine der beiden Aussagen } a \text{ und } b \text{ wahr ist}$$

- $\veebar$ (sprich: "entweder oder") ist eine Verknüpfung zwischen Aussagen, denn zu zwei Aussagen a und b ist $a \veebar b$ wiederum eine Aussage. Dabei gilt:

$$a \veebar b \text{ ist wahr, } \quad \underline{\text{falls}} \quad \text{genau eine der beiden Aussagen } a \text{ und } b \text{ wahr ist}$$

- $\Rightarrow$ (sprich: "folgt") ist eine Verknüpfung zwischen Aussagen, denn zu zwei Aussagen a und b ist $a \Rightarrow b$ wiederum eine Aussage. Dabei gilt:

$$a \Rightarrow b \text{ ist wahr, } \quad \underline{\text{falls}} \quad a \text{ falsch ist oder } b \text{ wahr ist (oder beides)}$$

- $\Leftrightarrow$ (sprich: "äquivalent") ist eine Verknüpfung zwischen Aussagen, denn zu zwei Aussagen a und b ist $a \Leftrightarrow b$ wiederum eine Aussage. Dabei gilt:

$$a \Leftrightarrow b \text{ ist wahr, } \quad \underline{\text{falls}} \quad a \text{ und } b \text{ beide falsch oder beide wahr sind}$$

Man kann dies auch in einer **Wahrheitswertetafel** festhalten:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \veebar b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	f	w	w

(Wir werden noch diskutieren, warum die letzten beiden Spalten sinnvoll definiert sind.)

- $\neg$ (sprich: "nicht") ist ebenfalls von Bedeutung: Zu einer Aussage a ist $\neg a$ wiederum eine Aussage. Dabei gilt: $\neg a$ ist wahr, <u>falls</u> a falsch ist

a	$\neg a$
w	f
f	w

Aufgabe 4.4.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

$$
\begin{array}{l}
3 \le 4+2 \;\wedge\; 2-1 \neq 5:5 \\
1 = 4+3 \;\vee\; 12^2 = 164 \\
3^2+4^2 = 5^2 \;\vee\; 6^2+8^2 = 10^2 \\
3^2+4^2 = 5^2 \;\dot\vee\; 6^2+8^2 = 10^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
4 \le 4 \;\vee\; (4 \mid 7 \;\wedge\; 7 \mid 4) \\
(4 \le 4 \;\vee\; 4 \mid 7) \;\wedge\; 7 \mid 4 \\
\neg(5 \cdot 3 = 15) \;\wedge\; 22-5 > 17 \\
\neg(5 \cdot 3 = 15 \;\wedge\; 22-5 > 17)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3 < 5 \;\Rightarrow\; 4 = 6 \\
3 < 5 \;\Rightarrow\; 2 \mid 18 \\
4 \ge \frac{9}{2} \;\Rightarrow\; 4 = 6 \\
4 \ge \frac{9}{2} \;\Rightarrow\; 2 \mid 18
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
3 < 5 \;\Leftrightarrow\; 4 = 6 \\
3 < 5 \;\Leftrightarrow\; 2 \mid 18 \\
4 \ge \frac{9}{2} \;\Leftrightarrow\; 4 = 6 \\
4 \ge \frac{9}{2} \;\Leftrightarrow\; 2 \mid 18
\end{array}
$$

(mögliche) Antwort:

$$\underbrace{3 \le 4+2}_{w} \wedge \underbrace{2-1 \neq 5:5}_{f} \quad \text{f}$$

$$\underbrace{1 = 4+3}_{f} \vee \underbrace{12^2 = 164}_{f} \quad \text{f}$$

$$\underbrace{3^2+4^2 = 5^2}_{w} \vee \underbrace{6^2+8^2 = 10^2}_{w} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{3^2+4^2 = 5^2}_{w} \dot\vee \underbrace{6^2+8^2 = 10^2}_{w} \quad \text{f}$$

$$\underbrace{4 \le 4}_{w} \vee \underbrace{(\underbrace{4 \mid 7}_{f} \wedge \underbrace{7 \mid 4}_{f})}_{f} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{(\underbrace{4 \le 4}_{w} \vee \underbrace{4 \mid 7}_{f})}_{w} \wedge \underbrace{7 \mid 4}_{f} \quad \text{f}$$

$$\underbrace{\neg(\underbrace{5 \cdot 3 = 15}_{w})}_{f} \wedge \underbrace{22-5 > 17}_{f} \quad \text{f}$$

$$\neg\underbrace{(\underbrace{5 \cdot 3 = 15}_{w} \wedge \underbrace{22-5 > 17}_{f})}_{f} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{3 < 5}_{w} \Rightarrow \underbrace{4 = 6}_{f} \quad \text{f}$$

$$\underbrace{3 < 5}_{w} \Rightarrow \underbrace{2 \mid 18}_{w} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{4 \ge \tfrac{9}{2}}_{f} \Rightarrow \underbrace{4 = 6}_{f} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{4 \ge \tfrac{9}{2}}_{f} \Rightarrow \underbrace{2 \mid 18}_{w} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{3 < 5}_{w} \Leftrightarrow \underbrace{4 = 6}_{f} \quad \text{f}$$

$$\underbrace{3 < 5}_{w} \Leftrightarrow \underbrace{2 \mid 18}_{w} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{4 \ge \tfrac{9}{2}}_{f} \Leftrightarrow \underbrace{4 = 6}_{f} \quad \text{w}$$

$$\underbrace{4 \ge \tfrac{9}{2}}_{f} \Leftrightarrow \underbrace{2 \mid 18}_{w} \quad \text{f}$$

Aufgabe 4.5.

(a) An einem See steht ein Schild mit der Aufschrift: $\boxed{\textit{Angeln und Baden verboten!}}$

Stellen Sie die Anweisung des Schildes mithilfe der Aussagen:

$$\boxed{\textit{A: Jemand angelt.}} \quad \textit{und} \quad \boxed{\textit{B: Jemand badet.}}$$

sowie einigen der Zeichen $\vee$, $\veebar$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *und* $\neg$ *dar.*

Suchen Sie mehrere Möglichkeiten und erstellen Sie jeweils eine Wahrheitswertetafel für die Aussage, die Sie erstellt haben (in Abhängigkeit der möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von A und B).

Interpretieren Sie das Ergebnis.

(b) In einem Lokal mit einem Innenhof gibt es die Regel:

$$\boxed{\textit{Wer raucht, muss sich sich im Hof aufhalten!}}$$

Stellen Sie diese Regel mithilfe der Aussagen:

$$\boxed{\textit{R: Jemand raucht.}} \quad \textit{und} \quad \boxed{\textit{H: Jemand hält sich im Hof auf.}}$$

sowie einigen der Zeichen $\vee$, $\veebar$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *und* $\neg$ *dar.*

Suchen Sie mehrere Möglichkeiten (dazu kann es hilfreich sein, die Regel umzuformulieren) und erstellen Sie jeweils eine Wahrheitswertetafel für die Aussage, die Sie erstellt haben (in Abhängigkeit der möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von A und B).

Interpretieren Sie das Ergebnis.

(mögliche) Antwort:

(a) Die Anweisung des Schildes kann beschrieben werden durch:

$\neg(A \vee B)$: Es ist nicht erlaubt zu angeln oder zu baden.

bzw. $(\neg A) \wedge (\neg B)$: Es ist nicht erlaubt zu angeln und es ist nicht erlaubt zu baden.

Wahrheitswertetafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten für $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$ sind identisch. Diese beiden Aussagen haben also immer denselben Wahrheitswert, beide obigen Formulierungen der Anweisung des Schildes sind somit gleichwertig.

Dies lässt sich verallgemeinern: Für beliebige Aussagen a, b haben $\neg(a \vee b)$ und $(\neg a) \wedge (\neg b)$ stets denselben Wahrheitswert, das heißt es gilt immer:

$$\big[\neg(a \vee b)\big] \Leftrightarrow \big[(\neg a) \wedge (\neg b)\big] \quad \text{(Regeln von } \textbf{de Morgan}\text{)}$$

Ganz analog: $\big[\neg(a \wedge b)\big] \Leftrightarrow \big[(\neg a) \vee (\neg b)\big]$ (Regeln von **de Morgan**)

(b) Die Regel kann beschrieben werden durch:

	$R \Rightarrow H$	:	Wer raucht, muss sich sich im Hof aufhalten!
bzw.	$(\neg H) \Rightarrow (\neg R)$	:	Wer sich drinnen aufhält, darf nicht rauchen!
bzw.	$H \vee (\neg R)$	:	Man muss sich im Hof aufhalten oder nicht rauchen (oder beides).
bzw.	$\neg(R \wedge (\neg H))$	:	Es ist verboten, sich drinnen aufzuhalten und zu rauchen.

Wahrheitswertetafel:

R	H	$\neg R$	$\neg H$	$R \Rightarrow H$	$(\neg H) \Rightarrow (\neg R)$	$H \vee (\neg R)$	$\neg(R \wedge (\neg H))$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w

Die letzten 4 Spalten sind identisch. Diese 4 Aussagen haben also immer denselben Wahrheitswert, die 4 obigen Formulierungen der Regel sind somit gleichwertig.

Dies lässt sich verallgemeinern (im Folgenden nur für die ersten beiden Formulierungen der Regel): Für beliebige Aussagen a, b haben $a \Rightarrow b$ und $(\neg b) \Rightarrow (\neg a)$ stets denselben Wahrheitswert, das heißt es gilt immer:

$$\big[a \Rightarrow b\big] \iff \big[(\neg b) \Rightarrow (\neg a)\big] \quad \text{(Regel der } \textbf{Kontraposition}\text{)}$$

All die bisherigen Regeln gelten auch für Aussageformen, diese werden durch Einsetzen ja zu Aussagen.

Aufgabe 4.6.

Seien a, b, c irgendwelche Aussagen. Für die Wahrheitswerte von a, b, c gibt es 8 Kombinationen (siehe die ersten 3 Spalten in folgender Wahrheitswertetafel).

Füllen Sie die Wahrheitswerte in den restlichen Spalten aus und vergleichen Sie die Spalten zu $a \Rightarrow (b \vee c)$ und $(a \wedge (\neg b)) \Rightarrow c$.

a	b	c	$b \vee c$	$a \Rightarrow (b \vee c)$	$\neg b$	$a \wedge (\neg b)$	$(a \wedge (\neg b)) \Rightarrow c$
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

Interpretieren Sie dann das Ergebnis allgemein sowie in Bezug auf die folgenden Beispiel-Aussagen (genauer gesagt "Aussageformen", mehr dazu siehe unten) für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{a\text{: } n \text{ ist eine Primzahl.}}$ *und* $\boxed{b\text{: } n = 2}$ *und* $\boxed{c\text{: } n \text{ ist ungerade.}}$

(mögliche) Antwort:

a	b	c	$b \vee c$	$a \Rightarrow (b \vee c)$	$\neg b$	$a \wedge (\neg b)$	$(a \wedge (\neg b)) \Rightarrow c$
w	w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	w	w	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	f
f	w	w	w	w	f	f	w
f	w	f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	f	w

Die Spalten zu $a \Rightarrow (b \vee c)$ und $(a \wedge (\neg b)) \Rightarrow c$ sind identisch, beide Aussagen haben also immer denslben Wahrheitswert. Es gilt also stets:

$$\big[a \Rightarrow (b \vee c)\big] \;\Leftrightarrow\; \big[(a \wedge (\neg b)) \Rightarrow c\big]$$

In Bezug auf das Beispiel haben wir:

$a \Rightarrow (b \vee c)$: Wenn n eine Primzahl ist, dann ist $n = 2$ oder n ist ungerade.
$(a \wedge (\neg b)) \Rightarrow c$: Wenn n eine Primzahl und von 2 verschieden ist, dann ist n ungerade.

Beide Aussagen sind offenbar gleichwertig, in diesem Fall sind sie beide (unabhängig von n) wahr.

Frage 4.7.

Was ist eine Variable (im Sinne der Mathematik bzw. der Logik)?

(mögliche) Antwort: Eine Variable bezeichnet in der Mathematik einen Platzhalter für eine Rechengröße, beispielsweise eine Zahl. (Wikipedia)
Dabei benutzt man ein bestimmtes Symbol (z.B. einen Buchstaben) und stellt (genau) klar, wofür dieses Symbol stehen kann (steht z.B. x für eine Zahl, so muss dabei auch festgelegt werden, in welcher Zahlmenge x liegen darf). Variablen können auch für andere Objekte stehen (z.B. Mengen, Vektoren, Funktionen, Relationen, Verknüpfungen, Aussagen, ...).

Die Benutzung von Variablen hat eine enorme Bedeutung in der Mathematik, denn sie erlaubt es übergeordnete Sachverhalte zu formulieren.

Frage 4.8.

Kann man Variablen mit Verknüpfungen, Zahlen und Relationen kombinieren, um damit Aussagen zu erstellen?

(mögliche) Antwort: Nein, beispielsweise sind (x, y sind hierbei Variablen, die für reelle Zahl stehen)

$$x < 4 \quad , \quad x + 5 \neq 4 \cdot (y - 1) \quad , \quad x^2 + y^2 = -7 \quad , \quad (x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

keine Aussagen, denn der Wahrheitswert kann davon abhängen, für welche Zahlen x und y stehen.

Ein Ausdruck mit (mindestens) einer Variablen wird als Aussageform bezeichnet. Aussageformen können in Aussagen übergehen wenn konkrete Elemente für die Variablen eingesetzt werden.

Frage 4.9.
Wie kann eine Aussageform in eine Aussage übergehen?

(mögliche) Antwort:

- Durch Einsetzen (Ersetzen der Variablen durch eine bestimmte Zahl):

  -) Die Aussageform $x < 4$ wird beispielsweise zu einer wahren Aussage, wenn man x durch die Zahl -3 ersetzt und zu einer falschen Aussage, wenn man x durch die Zahl $\frac{199}{12}$ ersetzt.

  -) Die Aussageform $x + 5 \neq 4 \cdot (y - 1)$ wird beispielsweise zu einer falschen Aussage, wenn man x durch die Zahl -5 und y durch die Zahl 1 ersetzt.

  -) Die Aussageform $x^2 + y^2 = -7$ wird immer zu einer falschen Aussage, wenn man x und y durch irgendwelche reellen Zahlen ersetzt.

  -) Die Aussageform $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$ wird immer zu einer wahren Aussage, wenn man x und y durch irgendwelche reellen Zahlen ersetzt.

  Bei einer Aussageform, bei der man durch Ersetzen der Variablen <u>immer</u> eine wahre (bzw. immer eine falsche) Aussage erhalten würde, handelt es sich dennoch <u>nicht</u> um eine Aussage.

- Durch die Verwendung von Quantoren: Es gibt zwei Quantoren, die häufig verwendet werden:

$$\forall: \text{“für alle“} \qquad \text{und} \qquad \exists: \text{“es existiert (es gibt)“}$$

Aufgabe 4.10.

Nennen Sie Beispiele von wahren und falschen Aussagen, in denen Quantoren vorkommen.

(mögliche) Antwort:

- Wahre Aussagen:

  -) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$ 3. Binomische Formel

  -) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \ x^2 > 0$

  -) $\exists x \in \mathbb{R}: \ x < 4$

  -) $\exists x \in \mathbb{R}: \ x > 4$

  -) $\forall a \in \mathbb{Q} \ \exists b \in \mathbb{Q}: \ a + 1 = 2b$

- Falsche Aussagen:

  -) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x < 4$

  -) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x > 4$

  -) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 > 0$

  -) $\exists x, y \in \mathbb{R}: \ (x+y)\cdot(x-y) \neq x^2 - y^2$

  -) $\exists b \in \mathbb{Q} \ \forall a \in \mathbb{Q}: \ a + 1 = 2b$

Duch den Existenz- bzw. Allquantor sind dies tatsächlich Aussagen.

Aufgabe 4.11.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

$$\begin{array}{l}
\exists x,y\in\mathbb{Z}:\ x-y=y-x\\
\forall x,y\in\mathbb{Z}:\ x-y=y-x\\
\forall x,y\in\mathbb{Z}:\ x\cdot y=y\cdot x\\
\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}:\ y>x\\
\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}:\ y>x
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\forall x,y\in\mathbb{Q}\ \exists z\in\mathbb{Q}:\ x=z\cdot y\\
\forall x\in\mathbb{Z}:\ (x>5\ \Rightarrow\ x>3)\\
\forall x\in\mathbb{Z}:\ (x>3\ \Rightarrow\ x>5)\\
\forall x\in\mathbb{R}:\ (x+8=17\ \Leftrightarrow\ x=9)\\
\forall x\in\mathbb{R}:\ \big(x^2=9\ \Leftrightarrow\ x=3\big)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\exists x\in\mathbb{R}:\ (x=0\ \Leftrightarrow\ x=1)\\
\big(\exists x\in\mathbb{Z}:\ x^2=16\big)\ \wedge\ (\exists x\in\mathbb{Z}:\ 8x-2=-42)\\
\exists x\in\mathbb{Z}:\ \big(x^2=16\ \wedge\ 8x-2=-42\big)\\
\forall x\in\mathbb{R}:\ (x<7\ \vee\ x\geq-2)\\
(\forall x\in\mathbb{R}:\ x<7)\ \vee\ (\forall x\in\mathbb{R}:\ x\geq-2)
\end{array}$$

(mögliche) Antwort:

$$\begin{array}{ll}
\exists x,y\in\mathbb{Z}:\ x-y=y-x & \text{w}\\
\forall x,y\in\mathbb{Z}:\ x-y=y-x & \text{f}\\
\forall x,y\in\mathbb{Z}:\ x\cdot y=y\cdot x & \text{w}\\
\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}:\ y>x & \text{w}\\
\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}:\ y>x & \text{f}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall x,y\in\mathbb{Q}\ \exists z\in\mathbb{Q}:\ x=z\cdot y & \text{f}\\
\forall x\in\mathbb{Z}:\ (x>5\ \Rightarrow\ x>3) & \text{w}\\
\forall x\in\mathbb{Z}:\ (x>3\ \Rightarrow\ x>5) & \text{f}\\
\forall x\in\mathbb{R}:\ (x+8=17\ \Leftrightarrow\ x=9) & \text{w}\\
\forall x\in\mathbb{R}:\ \big(x^2=9\ \Leftrightarrow\ x=3\big) & \text{f}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\exists x\in\mathbb{R}:\ (x=0\ \Leftrightarrow\ x=1) & \text{w}\\
\big(\exists x\in\mathbb{Z}:\ x^2=16\big)\ \wedge\ (\exists x\in\mathbb{Z}:\ 8x-2=-42) & \text{w}\\
\exists x\in\mathbb{Z}:\ \big(x^2=16\ \wedge\ 8x-2=-42\big) & \text{f}\\
\forall x\in\mathbb{R}:\ (x<7\ \vee\ x\geq-2) & \text{w}\\
(\forall x\in\mathbb{R}:\ x<7)\ \vee\ (\forall x\in\mathbb{R}:\ x\geq-2) & \text{f}
\end{array}$$

Aufgabe 4.12.

Bilden Sie die **Negation** *(Verneinung/Gegenaussage) zu den folgenden Aussagen, ohne dabei das Symbol $\neg$ zu verwenden. Entscheiden Sie jeweils ob die angegebene Aussage oder ihre Negation wahr ist:*

$2+2=4 \ \wedge \ 2\cdot 2 \neq 4$
$3+3=9 \ \vee \ 3\cdot 3 \neq 9$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \sqrt{x^2} = x$
$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \ \sqrt{x}^2 = x$
$\exists x \in \mathbb{Q} \ x^2 = 7$
$\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 = 7$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R}: \ 4y = x$
$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}: \ 4y = x$
$\forall x, y \in \mathbb{R}: [x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)]$
$\forall x, y \in \mathbb{R}: (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$

(mögliche) Antwort:

Aussage	Negation
$2+2=4 \ \wedge \ 2\cdot 2 \neq 4$ f	$2+2\neq 4 \ \vee \ 2\cdot 2 = 4$ w
$3+3=9 \ \vee \ 3\cdot 3 \neq 9$ f	$3+3\neq 9 \ \wedge \ 3\cdot 3 = 9$ w
$\forall x \in \mathbb{R} \ \sqrt{x^2} = x$ f	$\exists x \in \mathbb{R} \ \sqrt{x^2} \neq x$ w
$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \ \sqrt{x}^2 = x$ w	$\exists x \in \mathbb{R}_0^+ \ \sqrt{x}^2 \neq x$ f
$\exists x \in \mathbb{Q} \ x^2 = 7$ f	$\forall x \in \mathbb{Q} \ x^2 \neq 7$ w
$\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 = 7$ w	$\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \neq 7$ f
$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R}: \ 4y = x$ w	$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}: \ 4y \neq x$ f
$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}: \ 4y = x$ f	$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R}: \ 4y \neq x$ w
$\forall x, y \in \mathbb{R}: [x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)]$ w	$\exists x, y \in \mathbb{R}: [x \cdot y = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0]$ f
$\forall x, y \in \mathbb{R}: (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$ f	$\exists x, y \in \mathbb{R}: (x < y \wedge x^2 \geq y^2)$ w

Aufgabe 4.13.

Formulieren Sie die folgenden (wahren) Aussagen präzise:

(i) *In $\mathbb{R}$ gilt das Distributivgesetz.*

(ii) *Auf $\mathbb{Q}$ gibt es die Verknüpfung Division (mit der Ausnahme, dass nicht durch 0 dividiert werden darf).*

(iii) *Die Multiplikation in $\mathbb{N}$ hat ein neutrales Element.*

(iv) *$\mathbb{Q}$ ist dicht.*

(v) *Aus jeder nichtnegativen rellen Zahl kann man die Wurzel ziehen.*

(vi) *Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.*

(vii) *Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.*

(viii) *Es gibt keine kleinste reelle Zahl.*

(ix) *Die Teilbarkeitsrelation (auf $\mathbb{N}$) ist reflexiv.*

(x) *Die Teilbarkeitsrelation (auf $\mathbb{N}$) ist transitiv.*

(xi) *Je zwei natürliche Zahlen haben einen größten gemeinsamen Teiler.*

(mögliche) Antwort:

(i) In $\mathbb{R}$ gilt das Distributivgesetz.
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ x(y+z) = xy + xz$

(ii) Auf $\mathbb{Q}$ gibt es die Verknüpfung Division (mit der Ausnahme, dass nicht durch 0 dividiert werden darf).
$\forall x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ x : y \in \mathbb{Q}$
$\forall x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ \exists! z \in Q\ x = y \cdot z$, „$\exists!$" steht dabei für „es gibt ein eindeutiges..."

(iii) Die Multiplikation in $\mathbb{N}$ hat ein neutrales Element.
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ (x \cdot N = x \wedge N \cdot x = x)$

(iv) $\mathbb{Q}$ ist dicht.
$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y\ \exists z \in \mathbb{Q}\ x < z < y$
$\forall x, y \in \mathbb{Q}\ [x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}\ (x < z \wedge z < y))]$

(v) Aus jeder nichtnegativen rellen Zahl kann man die Wurzel ziehen.
$\forall x \in \mathbb{R}_0^+\ \exists! y \in \mathbb{R}_0^+\ y^2 = x$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ heißt $x \geq 0$

(vi) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ [x < y \wedge \forall z \in \mathbb{N}\ (z \leq x \vee y \leq z)]$

(vii) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ N \leq x$

(viii) Es gibt keine kleinste reelle Zahl.
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y < x$

(ix) Die Teilbarkeitsrelation (auf $\mathbb{N}$) ist reflexiv.
$\forall x \in \mathbb{N}\ x \mid x$

(x) Die Teilbarkeitsrelation (auf $\mathbb{N}$) ist transitiv.
$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ [(x \mid y \wedge y \mid z) \Rightarrow x \mid z]$

(xi) Je zwei natürliche Zahlen haben einen größten gemeinsamen Teiler.
$\forall x, y \in \mathbb{N}\ \exists g \in \mathbb{N}\ [g \mid x \wedge g \mid y \wedge (\forall \tilde{g} \in \mathbb{N}\ (\tilde{g} \mid x \wedge \tilde{g} \mid y) \Rightarrow \tilde{g} \leq g)]$

5. Mengen

Frage 5.1.
Was ist eine Menge ?

(mögliche) Antwort: Die Menge ist eines der wichtigsten und grundlegenden Konzepte der Mathematik. Einzelne Elemente (beispielsweise Zahlen) werden zu einer Menge zusammengefasst. Dabei geht es ausschließlich um die Frage, welche Elemente in der Menge enthalten sind. Es wird nicht danach gefragt, ob ein Element mehrmals enthalten ist, oder ob es eine Reihenfolge unter den Elementen gibt. (vgl: Wikipedia)

So ist $\{1\} = \{1,1\} = \{1,1,1\}$ dieselbe Menge, egal wie oft Sie das eine Element 1 hineinschreiben. Bei Tupeln $(1,2,3) \neq (3,2,1)$ hingegen kommt es auf die Reihenfolge an, z.B. in Lineare Algebra und Stochastik.

Frage 5.2.

Erklären Sie die Symbole $\in$ und $\notin$ und ihre Verwendung.

(mögliche) Antwort: $\in$ und $\notin$ stehen immer zwischen einem Objekt x und einer Menge A. Dabei sind $x \in A$ und $x \notin A$ Aussagen (wenn man für x ein bestimmtes Objekt und für A eine bestimmte Menge einsetzt, ansonsten sind es lediglich Aussageformen) und es gilt:

- $\boxed{x \in A}$ ist genau dann gültig (wahr), wenn x ein Element von A ist.
- $\boxed{x \notin A}$ ist genau dann gültig (wahr), wenn x kein Element von A ist.

$$\text{Also gilt für alle Objekte } x \text{ und alle Mengen } A\text{:} \quad x \notin A \;\Leftrightarrow\; \neg(x \in A)$$

Frage 5.3.
Welche Möglichkeiten und Notationen gibt es, Mengen zu beschreiben? Geben Sie jeweils auch Beispiele an.

(mögliche) Antwort: Bei der Beschreibung einer Menge muss (präzise!) geklärt werden, welche Objekte Elemente der Menge sind (und welche nicht). Diese Information findet man grundsätzlich zwischen zwei Mengenklammern $\{\ldots\}$. Dabei hat man etwa die folgenden Möglichkeiten:

- Die Elemente werden einfach aufgezählt.

  Beispiele:

  $\{1,2,3,4,5,6,73\}$, $\left\{\sqrt{2}, -\frac{4}{77}, 0, -8\right\}$, $\{4,8,12,16,\ldots\ldots\}$, $\{\ldots -16, -11, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

  (Die Pünktchen können dabei nur verwendet werden, wenn absolut klar ist, wie die Zahlenfolge fortgesetzt werden soll.)

- Die Elemente der Menge werden mit einer (oder mehreren) Variablen beschrieben. Nach einem Trennzeichen (meist ; oder |) wird geklärt, welche Objekte für die Variable(n) eingesetzt werden dürfen. Wann immer man solche zugelassenes Objekte einsetzt, erhält man ein Element der Menge.

  Beispiele: $\{4k;\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{k^2;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\left\{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$, $\{-3^x + 2;\ x \in \mathbb{R}\}$, $\left\{\frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$

- Die Elemente der Menge werden durch eine Variable (aus einer Grundmenge) dargestellt. Nach einem Trennzeichen (meist ; oder |) werden eine (oder mehrere) Bedingung(en) für die Variablen festgelegt. Setzt man für die Variable ein Objekt (z.B. eine Zahl) ein, so ist dieses Objekt genau dann ein Element der Menge, wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

  Beispiele: $\{x \in \mathbb{R};\ 4x + 3 \le 17\}$, $\{n \in \mathbb{N};\ n \text{ durch 4 teilbar}\}$, $\{a \in \mathbb{Z};\ a^2 < 0\}$

  $\{x \in \mathbb{R};\ x < 7\ \wedge\ x^2 \ge 4\}$, $\{a \in \mathbb{N};\ \exists b \in \mathbb{Z} : b^2 = a\}$, $\{x \in \mathbb{R};\ \forall y \in \mathbb{R} : (xy)^2 = y^2\}$

  Weitere Beispiele bilden die Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man beispielsweise:

  $$\begin{aligned}
  [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\} \\
  ]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} = (a,b) \text{ alternative Schreibweise} \\
  ]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\} = (a,\infty) \text{ alternative Schreibweise} \\
  ]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R};\ x \le b\} = (-\infty,b] \text{ alternative Schreibweise} \\
  &\text{usw.}
  \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4.

Entscheiden Sie bei den folgenden Mengen jeweils, ob die angegebenen Zahlen Elemente dieser Menge sind. Ergänzen Sie jeweils auch die alternativen Darstellungen:

Menge	*Welche dieser Zahlen sind Elemente der Menge?*	*Alternative Darstellungen der Menge*
$A = \{4k+3;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$-1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 99\ ,\ 101\ ,\ -99\ ,\ -101$	$A = \{\dots,\quad,\quad,\quad,\quad,\dots\}$
$B = \{k \in \mathbb{R};\ 4k+3 \in \mathbb{Z}\}$	$-1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 99\ ,\ 101\ ,\ -99\ ,\ -101$ $\frac{3}{4}\ ,\ \frac{7}{8}\ ,\ \frac{6}{8}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \frac{-9}{2}$	$B = \{\qquad ; k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{\dots,\quad,\quad,\quad,\quad,\dots\}$
$C = \{\dots,-12,-7,-2,3,8,13,18,\dots\}$	$8\ ,\ -6\ ,\ 502\ ,\ 503\ ,\ -502\ ,\ -503\ ,\ 88$	$C = \{\qquad ; k \in \mathbb{Z}\}$
$D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x^2 > x\right\}$	$-3\ ,\ -1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3$	$D = \{x \in \mathbb{R};\ x \dots\ \vee\ x \dots\}$
$E = \left\{x \in \mathbb{Z};\ x^2+5x+1=0\right\}$	$-5\ ,\ -3\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 5$	$E =$
$F = \{z \in \mathbb{Z};\ -4z > 8\ \wedge\ z+4 > -4\}$	$-9\ ,\ -8\ ,\ -5\ ,\ \frac{-9}{2}\ ,\ -3\ ,\ 2\ ,\ 12$	$F = \{\qquad\}$
$G = \{2^x - 5;\ x \in \mathbb{R}\}$	$-8\ ,\ -5\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \frac{18}{5}\ ,\ \frac{-18}{5}$	$G = \{x \in\quad ;\qquad\}$
$H = \{x+y;\ x,y \in \mathbb{R}\ mit\ x > 0 \wedge y < 0\}$	$-4\ ,\ -\frac{3}{2}\ ,\ 0\ ,\ 55\ ,\ \sqrt{199}$	$H =$
$I = \left\{\frac{x+1}{y+4};\ x,y \in \mathbb{N}\right\}$	$\frac{5}{12}\ ,\ \frac{-5}{12}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 17\ ,\ 0$	$I =$

(mögliche) Antwort:

Menge	Welche dieser Zahlen sind Elemente der Menge?	Alternative Darstellungen der Menge
$A = \{4k+3;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$-1,3,99,-101 \in A$ $0,1,101,-99 \notin A$	$A = \{\dots,\ -9,-5,-1,3,7,11,\ \dots\}$
$B = \{k \in \mathbb{R};\ 4k+3 \in \mathbb{Z}\}$	$-1,0,1,3,99,101,-99,-101,\frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{-9}{2} \in B$ $\frac{7}{8},\frac{1}{5} \notin B$	$B = \left\{\frac{k}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $B = \left\{\dots,\frac{-3}{4},\frac{-2}{4},\frac{-1}{4},\frac{0}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{5}{4},\dots\right\}$
$C = \{\dots,-12,-7,-2,3,8,13,18,\dots\}$	$8,503-502,88 \in C$ $-6,502,-503 \notin C$	$C = \{5k+3; k \in \mathbb{Z}\} = \{5k-2; k \in \mathbb{Z}\} = \dots$
$D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x^2 > x\right\}$	$-3,-1,-\frac{1}{2},2,3 \in D$ $0,\frac{1}{2},1 \notin D$	$D = \{x \in \mathbb{R};\ x < 0\ \vee\ x > 1\}$
$E = \left\{x \in \mathbb{Z};\ x^2+5x+1=0\right\}$	$-5,-3,-1,0,1,3,5 \notin E$	$E = \{\} =: \varnothing$
$F = \{z \in \mathbb{Z};\ -4z > 8\ \wedge\ z+4 > -4\}$	$-5,-3 \in F$ $-9,-8,\frac{-9}{2},2,12 \notin F$	$F = \{-7,-6,-5,-4,-3\}$
$G = \{2^x - 5;\ x \in \mathbb{R}\}$	$0,\sqrt{2},\frac{18}{5},\frac{-18}{5} \in G$ $-5,-8 \notin G$	$G = \{x \in \mathbb{R};\ x > -5\}$
$H = \{x+y;\ x,y \in \mathbb{R}\text{ mit }x > 0 \wedge y < 0\}$	$-4,-\frac{3}{2},0,55,\sqrt{199} \in H$	$H = \mathbb{R}$
$I = \left\{\frac{x+1}{y+4};\ x,y \in \mathbb{N}\right\}$	$\frac{5}{12},\frac{3}{8},\frac{1}{2},17 \in I$ $\frac{-5}{12},0 \notin I$	$I = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$

Frage 5.5.
Erklären Sie, wann zwei Mengen **gleich** *sind.*

(mögliche) Antwort: Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten, also wenn:

- Jedes Element von A auch ein Element von B ist.
- Jedes Element von B auch ein Element von A ist.

<u>Präziser:</u> $\forall \text{Mengen } A, B: \quad A = B \iff [(\forall x \in A : x \in B) \wedge (\forall x \in B : x \in A)]$

<u>oder:</u> $\forall \text{Mengen } A, B: \quad A = B \iff [\forall x \in \Omega : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$

falls Ω eine Menge mit $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$ ist

Frage 5.6.
Welche Relationen zwischen Mengen kennen Sie? Erklären Sie sie auch.

(mögliche) Antwort: (Ist $\sim$ eine Relation zwischen Mengen, so ist (wenn A, B Mengen sind) $A \sim B$ eine Aussage, d.h. sie kann entweder wahr oder falsch sein. Um die Relation (präzise) zu beschreiben, muss geklärt werden, wann die Aussage wahr ist und wann nicht.)

- $\subseteq$ (sprich:"Teilmenge") ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A \subseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in A \text{ gilt } x \in B$$

  D.h.: Die Relation $A \subseteq B$ liegt (genau) dann vor, wenn jedes Element von A auch in B liegt.

- $\nsubseteq$ ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A \nsubseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad \neg(A \subseteq B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ mit } x \notin B$$

  D.h.: Die Relation $A \nsubseteq B$ liegt (genau) dann vor, wenn es mindestens ein Element von A gibt, dass nicht in B liegt.

- $\supseteq$ (sprich:"Obermenge") ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A \supseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in B \text{ gilt } x \in A$$

  D.h.: Die Relation $A \supseteq B$ liegt (genau) dann vor, wenn jedes Element von B auch in A liegt.

- $\nsupseteq$ ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A \nsupseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad \neg(A \supseteq B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in B \text{ mit } x \notin A$$

  D.h.: Die Relation $A \nsupseteq B$ liegt (genau) dann vor, wenn es mindestens ein Element von B gibt, dass nicht in A liegt.

- $\subsetneq$ (sprich:"echte Teilmenge") ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A \subsetneq B \quad :\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge A \nsupseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A \text{ gilt } x \in B) \wedge (\exists x \in B \text{ mit } x \notin A)$$

  D.h.: Die Relation $A \subsetneq B$ liegt (genau) dann vor, wenn jedes Element von A auch in B liegt, es aber mindestens ein Element von B gibt, dass nicht in A liegt.

- $\supsetneq$ (sprich:"echte Obermenge") ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A \supsetneq B \quad :\Leftrightarrow \quad A \nsubseteq B \wedge A \supseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A \text{ mit } x \notin B) \wedge (\forall x \in B \text{ gilt } x \in A)$$

  D.h.: Die Relation $A \supsetneq B$ liegt (genau) dann vor, wenn jedes Element von B auch in A liegt, es aber mindestens ein Element von A gibt, dass nicht in B liegt.

- $=$ ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

  $$A = B \quad :\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge A \supseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A \text{ gilt } x \in B) \wedge (\forall x \in B \text{ gilt } x \in A)$$

  D.h.: Die Relation $A = B$ liegt (genau) dann vor, wenn jedes Element von A auch in B liegt und jedes Element von B auch in A liegt, d.h. wenn A und B genau dieselben Elemente haben.

- $\neq$ ist eine Relation zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:

$$A \neq B \quad :\Leftrightarrow \quad \neg(A = B) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A \text{ mit } x \notin B) \vee (\exists x \in B \text{ mit } x \notin A)$$

  D.h.: Die Relation $A \neq B$ liegt (genau) dann vor, wenn es (mindestens) ein Element gibt, dass in einer der beiden Mengen A, B enthalten ist, aber nicht in der Anderen.

- Die Echten Inklusionen $A \subsetneq B$ und $A \supsetneq B$ können wir jetzt auch umschreiben als $A \subsetneq B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge A \neq B)$ und $A \supsetneq B \Leftrightarrow ((A \supseteq B) \wedge A \neq B)$

Aufgabe 5.7.
Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &:= \{2k+5;\ k \in \mathbb{N}\} \qquad (\text{„}Menge\{Objekte\ ;\ deren\ Eigenschaften\}\text{“}) \\ B &:= \left\{x \in \mathbb{R};\ x^3 \geq 8\right\} \\ C &:= \{7, 8, 9 \ldots, 75, 76, 77\} \\ D &:= \{m \in \mathbb{N};\ m\ ungerade \vee m \geq 7\} \\ E &:= \{m \in \mathbb{N};\ m\ ungerade \wedge m \geq 7\} \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

$A \subseteq A$	$A \subseteq B$	$A \subseteq C$	$A \subseteq D$	$A \subseteq E$
$B \subseteq A$	$B \subseteq B$	$B \subseteq C$	$B \subseteq D$	$B \subseteq E$
$C \subseteq A$	$C \subseteq B$	$C \subseteq C$	$C \subseteq D$	$C \subseteq E$
$D \subseteq A$	$D \subseteq B$	$D \subseteq C$	$D \subseteq D$	$D \subseteq E$
$E \subseteq A$	$E \subseteq B$	$E \subseteq C$	$E \subseteq D$	$E \subseteq E$

Tipp: *Geben Sie zunächst alle Mengen in aufzählender Schreibweise oder als Intervall an.*

(mögliche) Antwort: Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \{7, 9, 11, 13, 15, \ldots\} \\ B &= [2, \infty[\\ C &= \{7, 8, 9 \ldots, 75, 76, 77\} \\ D &= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\} \\ E &= \{7, 9, 11, 13, 15, \ldots\} \end{aligned}$$

Die wahren Aussagen sind:

$A \subseteq A$	$A \subseteq B$		$A \subseteq D$	$A \subseteq E$
	$B \subseteq B$			
	$C \subseteq B$	$C \subseteq C$	$C \subseteq D$	
			$D \subseteq D$	
$E \subseteq A$	$E \subseteq B$		$E \subseteq D$	$E \subseteq E$

Beachte: Wegen $A \subseteq E$ und $E \subseteq A$ gilt $A = E$.

Frage 5.8.

Wir betrachten eine gegebene Menge Ω sowie die sogenannte **Potenzmenge** *von Ω, diese ist definiert als:* $\mathcal{P}(\Omega) \coloneqq \{A;\ A \subseteq \Omega\}$
(Somit ist $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge, deren Elemente die Teilmengen von Ω sind.)

Ist die Relation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ reflexiv und transitiv? Begründen Sie ihre Antwort.

(mögliche) Antwort: Ja, $\subseteq$ ist reflexiv und transitiv. Zur Begründung:

- $\subseteq$ ist reflexiv, denn für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $A \subseteq A$. (Für jedes $x \in A$ gilt $x \in A$.)
- $\subseteq$ ist transitiv, denn für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt:

  Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ gilt, dann wissen wir:

  1.) Jedes Element aus A ist auch in B.
  2.) Jedes Element aus B ist auch in C.

  Somit gilt für jedes Element $x \in A$, dass (wegen 1.)) auch $x \in B$ gilt und damit folgt (wegen 2.)), dass auch $x \in C$ gilt.
  Also ist jedes Element aus A auch in C und damit gilt dann $A \subseteq C$.

Frage 5.9.
Welche Verknüpfungen zwischen Mengen kennen Sie? Erklären Sie diese Verknüpfungen auch (in Worten, formal bzw. graphisch).

(mögliche) Antwort: (Ist $*$ eine Verknüpfung zwischen Mengen, so ist (wenn A, B Mengen sind) $A * B$ wieder eine Menge. Um die Verknüpfung (präzise) zu beschreiben, muss geklärt werden, welche Element zu dieser Menge gehören.)

- $\cap$ (sprich:“geschnitten“) ist eine Verknüpfung zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:
$$A \cap B := \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$$
Zu $A \cap B$ gehören also (genau) die Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

- $\cup$ (sprich:“vereinigt“) ist eine Verknüpfung zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:
$$A \cup B := \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$$
Zu $A \cup B$ gehören also (genau) die Elemente, die zu mindestens einer der Mengen A oder B gehören.

- $\setminus$ (sprich:“ohne“) ist eine Verknüpfung zwischen Mengen. Für beliebige Mengen A, B gilt:
$$A \setminus B := \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$$
Zu $A \setminus B$ gehören also (genau) die Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören.
Manchmal betrachtet man grundsätzlich nur Mengen, die Teilmenge einer Grundmenge M sind (z.B. $M = \mathbb{R}$). Dann schreibt man auch: $A^c := M \setminus A$ (sprich:“Komplement von A (in M)“) wenn aus dem Kontext klar ist welche Grundmenge M gemeint ist. Als Notation wird (z.B. in der FWG) häufig auch $\overline{A} := M \setminus A = A^c$ verwendet.

Vorsicht: In Analytische Grundlagen wird $\overline{A}$ für den Abschluss von A, ein ganz anderes Konzept verwendet. Achten Sie daher immer darauf welche Notationen in welcher Veranstaltung verwendet werden.

Aufgabe 5.10.
Wir betrachten (wie in 5.7) die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &:= \{2k+5;\ k \in \mathbb{N}\} \\ B &:= \left\{x \in \mathbb{R};\ x^3 \geq 8\right\} \\ C &:= \{7,8,9\ldots,75,76,77\} \\ D &:= \{m \in \mathbb{N};\ m \textit{ ungerade} \vee m \geq 7\} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Mengen:

$$A \cap C \quad , \quad A \cap D \quad , \quad B \cup D \quad , \quad B \cup C \quad , \quad A \setminus C \quad , \quad C \setminus A \quad , \quad C \setminus D \quad , \quad D \setminus (A \cup C)$$

(mögliche) Antwort: Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \{7,9,11,13,15,\ldots\} \\ B &= [2,\infty[\\ C &= \{7,8,9\ldots,75,76,77\} \\ D &= \{1,3,5,7,8,9,10,11,12,\ldots\} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} A \cap C &= \{7,9,11,13,15,\ldots,73,75,77\} \\ A \cap D &= \{7,9,11,13,15,\ldots\} = A \quad \text{(beachte, dass } A \subseteq D\text{)} \\ B \cup D &= [2,\infty[\cup\{1\} \\ B \cup C &= [2,\infty[= B \quad \text{(beachte, dass } C \subseteq B\text{)} \\ A \setminus C &= \{79,81,83,85,87,\ldots,\} \\ C \setminus A &= \{8,10,12,14,\ldots,72,74,76\} \\ C \setminus D &= \{\} \quad \text{(leere Menge), beachte, dass } C \subseteq D\text{)} \\ A \cup C &= \{7,8,9,\ldots,75,76,77,\ 79,81,83,85,\ldots\} \\ D \setminus (A \cup C) &= \{1,3,5,\ 78,80,82,84,\ldots\} \end{aligned}$$

6. Tupel

Frage 6.1.
Was ist ein Tupel?

(mögliche) Antwort: Ein Tupel ist eine endliche Liste, in der, hintereinander (nicht notwendig verschiedene) mathematische Objekte (z.B. Zahlen) stehen. Ist n die Länge der Liste, dann spricht man von einem n-Tupel (2-Tupel nennt man auch geordnete Paare, 3-Tupel Tripel und 4-Tupel Quadrupel). Das an i-ter Stelle eines Tupels stehende Objekt heißt seine i-te Komponente.
Notiert werden kann ein Tupel so: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (vgl: Wikipedia)
(Beispiel: $(1, 3, 1, -8)$ ist ein Tupel mit 1.Komp. 1, 2.Komp. 3, 3.Komp. 1 und 4.Komp. -8)

Frage 6.2.

Wann sind zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ *und* $(y_1, \ldots, y_m)$ *gleich?*

(mögliche) Antwort: Zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_m)$ sind (genau dann) gleich, wenn $n = m$ ist und $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3,\ \ldots\ x_n = y_n$ gilt.

Zwei Tupel sind also (genau) dann gleich, wenn sie gleich lang sind und jeweils entsprechende Komponenten beider Tupel übereinstimmen.

Aufgabe 6.3.

- *Gilt* $\{3,2,1,2,2,1,1,3\} = \{1,2,3\}$ *?*
- *Gilt* $(3,2,1,2,2,1,1,3) = (1,2,3)$ *oder* $(1,2,3,1) = (2,1,1,3)$ *?*

Aufgabe 6.4.

(a) Zählen Sie alle 3*-Tupel auf, deren Komponenten Elemente der Menge* $\{0,1\}$ *sind.*

(b) Zählen Sie alle 2*-Tupel auf, deren Komponenten Elemente der Menge* $\{1,2,3,4,5\}$ *sind.*

(c) Wieviele 12*-Tupel gibt es, deren Komponenten Elemente der Menge* $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ *sind.*

(d) Wieviele n*-Tupel gibt es, deren Komponenten Elemente einer vorgegebenen* k*-elementigen Menge sind. (Beantworten Sie die Frage allgemein für beliebige* $n, k \in \mathbb{N}$*.)*

Frage 6.5.
Wo finden Tupel in der Mathematik Verwendung? Geben Sie Beispiele an.

(mögliche) Antwort:

- zur Beschreibung von Punkten in der Ebene (2-Tupel) oder im Raum (3-Tupel) mittels Koordinaten
- zur Beschreibung von Vektoren in der Ebene (2-Tupel) oder im Raum (3-Tupel).
- Lösungen von Gleichungen (oder Gleichungssystemen) mit mehreren Unbekannten können als Tupel beschrieben werden (dabei müssen die Komponenten des Lösungstupels eineindeutig den in der Gleichung vorkommenden Variablen zugeordnet worden sein)

  Achtung: Bei diesen 3 Konzepten ist es häufig sinnvoller die Tupel nicht in eine Zeile nebeneinander, sondern in eine Spalte untereinander zu schreiben. Mehr dazu in der Vorlesung Lineare Algebra bei Matrizen.
- zur Beschreibung von Ergebnissen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (wenn die Reihenfolge beachtet werden soll)

Frage 6.6.
Was ist $A \times B$ („A kreuz B“) und A^n, wenn A, B Mengen sind und $n \in \mathbb{N}$ ist? Geben Sie eine präzise Definition und erläutern Sie diese an einem Beispiel.

(mögliche) Antwort:

- $A \times B$ ist ebenfalls eine Menge. Die Elemente von $A \times B$ sind die 2-Tupel, deren erste Komponente ein Element aus A ist und deren 2.Komponente ein Element aus B ist.

  $$\text{Definition:}\quad A \times B := \{(a,b);\; a \in A,\; b \in B\}$$

  Beispiele:

  - $\{1,2,3\} \times \{3,4,5,6\} = \left\{ \begin{array}{c} (1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4), \\ (2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \end{array} \right\}$
  - $\{1,10,100\} \times \{0,5\} = \{(1,0),(1,5),(10,0),(10,5),(100,0),(100,5)\}$
  - $\mathbb{N}_0 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{(n,x);\; n \in \mathbb{N}_0,\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

- A^n ist ebenfalls eine Menge. Die Elemente von A^n sind die n-Tupel, deren sämtliche Komponenten Elemente von A sind.

  $$\text{Definition:}\quad A^n := \{(a_1,\dots,a_n);\; a_1,\dots,a_n \in A\}$$

  Speziell ist $A^2 = A \times A$. Beispiele:

  - $\{1,2,3,4,5,6\}^2 = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$
  - $\{0,1\}^4 = \left\{ \begin{array}{c} (1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,1,0,0), \\ (1,0,1,1),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0), \\ (0,1,1,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,1,0,0), \\ (0,0,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,0,0) \end{array} \right\}$

Frage 6.7.

Welche Verknüpfungen zwischen Tupeln kennen Sie? Beschreiben Sie sie auch.

(mögliche) Antwort: (Ist $*$ eine Verknüpfung zwischen Tupeln, so ist (wenn x, y Tupel sind) $x * y$ wieder ein Tupel. Um die Verknüpfung (präzise) zu beschreiben, muss geklärt werden, welche Tupel für x und y zugelassen sind und wie man aus diesen beiden Elementen $x * y$ bestimmt.)

- Für zwei Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ kann man eine "Tupel-Addition" $\oplus$ definieren. Dabei gilt:

  $$(x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

  (Dabei wurde bewusst ein Symbol $\oplus$ gewählt, das sich von dem bekannten Symbol $+$ für die Zahlen-Addition unterscheidet. Manchmal wird auch dassselbe Symbol $+$ für die Zahlen-Addition und die Tupel-Addition verwendet, dies geht aber nur, wenn jederzeit klar ist, was gemeint ist.)

- Für zwei Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ kann man eine "Tupel-Multiplikation" $\odot$ definieren. Dabei gilt:

  $$(x_1, x_2, \dots, x_n) \odot (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n)$$

  (Diese Verknüpfung findet weit weniger Verwendung als die oben erklärte Addition $\oplus$.)

- Für zwei Tupel $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt $\times$ definiert. Dabei gilt:

  $$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2 \ , \ x_3 y_1 - x_1 y_3 \ , \ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Aufgabe 6.8.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

$\{0,1,2\} \subseteq \{0,1,2\}^4$
$\{0,1,2\}^6 \subseteq \{0,1,2,3,4\}^6$
$\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R} \wedge \mathbb{N} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$
$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0,0)\}$

(mögliche) Antwort:

$\{0,1,2\} \subseteq \{0,1,2\}^4$ f
$\{0,1,2\}^6 \subseteq \{0,1,2,3,4\}^6$ w
$\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R} \wedge \mathbb{N} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ w
$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ w
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0,0)\}$ f

7. Abbildungen

Frage 7.1.
Was ist eine Abbildung (bzw. Funktion)? Anders gefragt: Durch welche Angaben ist eine Abbildung vollständig festgelegt/beschrieben?

(mögliche) Antwort: Eine Abbildung ist durch die folgenden Angaben festgelegt:

- die **Definitionsmenge**: eine Menge
- die **Zielmenge**: eine Menge (nicht die leere Menge)
- die **Zuordnung**: eine Vorschrift, die angibt, wie jedem Element der Definitionsmenge (genau) ein Element der Zielmenge zugeordnet wird

Ist D die Definitionmenge und Z die Zielmenge einer Abbildung f, so ist also jedem $d \in D$ ein eindeutiges Element aus Z zugeordnet. Dieses bezeichnet man mit $f(d)$ (sprich: "f von d").
Man schreibt oft: $d \mapsto f(d)$, und sagt: "d wird (von der Abbildung f) auf $f(d)$ abgebildet."

Schreibweise: $\boxed{f : D \to Z,\ d \mapsto \dots}$ oder $\boxed{f : D \to Z,\ f(d) = \dots}$

Aufgabe 7.2.
Handelt es sich im Folgenden um Abbildungen?

(i) $\{1,2,3,4\} \to \{2,3,4,5,6\}\ ,\ \left\{\begin{array}{c} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 6 \end{array}\right\}$

(ii) $\{1,2,3,4\} \to \{2,3,4,5,6\}\ ,\ \left\{\begin{array}{c} 1 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 5 \\ 1 \mapsto 6 \end{array}\right\}$

(iii) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$

(iv) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ z \mapsto -z$

(v) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ z \mapsto 47339$

(vi) $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+,\ q \mapsto \sqrt{q}$

(vii) $\{-4, 12, \sqrt{3}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{12+3x}\ +2$

(viii) $\mathbb{R} \to \{1,2,3,4,5\},\ x \mapsto \left\{\begin{array}{lll} 1 & , & \textit{falls } x > 4 \\ 2 & , & \textit{falls } x < -3 \\ 3 & , & \textit{falls } -3 \le x \le 4 \end{array}\right\}$

(ix) $\mathbb{R} \to \{1,2,3,4,5\},\ x \mapsto \left\{\begin{array}{lll} 4 & , & \textit{falls } x \le 0 \\ 5 & , & \textit{falls } x \ge 0 \end{array}\right\}$

(x) $\{2k+1;\ k \in \mathbb{N}\} \to \{k \in \mathbb{Q};\ 2k \in \mathbb{N}\},\ x \mapsto x-1$

(xi) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto (x_2,x_1)$

(xii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1,x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}, 7\right)$

(xiii) $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{Z},\ (n_1,n_2,n_3) \mapsto n_1 - n_3$

(xiv) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R},\ (n_1,n_2) \mapsto \frac{n_1+n_2}{{n_1}^2-5{n_2}^2}$

(mögliche) Antwort:

(i) ist eine Abbildung

(ii) ist keine Abbildung
(Der 4 und der 1 werden jeweils mehrere Elemente zugeordnet, der 3 wird kein Element zugeordnet.)

(iii) ist eine Abbildung

(iv) ist keine Abbildung
(Ganzen Zahlen $z \ge 0$ wird kein Element aus der Zielmenge $\mathbb{N}$ zugeordnet.)

(v) ist eine Abbildung

(vi) ist keine Abbildung
(Zum Beispiel wird $2 \in \mathbb{Q}^+$ kein Element aus $\mathbb{Q}+$ zugeordnet, denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}+$.)

(vii) ist eine Abbildung
Es gilt: $-4 \mapsto 2 \quad , \quad 12 \mapsto 2 \cdot (\sqrt{12}+1) \quad , \quad \sqrt{3} \mapsto \sqrt{12+3\cdot\sqrt{3}}\ +2$

(viii) ist eine Abbildung

(ix) ist keine Abbildung
(Der 0 werden mehrere Elemente zugeordnet.)

(x) ist eine Abbildung
Es gilt: $\{2k+1;\ k \in \mathbb{N}\} = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$, $\{k \in \mathbb{Q};\ 2k \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots\}$
Es gilt: $3 \mapsto 2$, $5 \mapsto 4$, $7 \mapsto 6$, usw.

(xi) ist eine Abbildung

(xii) ist keine Abbildung
(Falls $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ wird (x_1, x_2) kein Element zugeordnet.)

(xiii) ist eine Abbildung

(xiv) ist eine Abbildung
($n_1{}^2 - 5n_2{}^2 = 0$ kann für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ nicht auftreten, das liegt daran dass $0 \notin \mathbb{N}$ und $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.)

Aufgabe 7.3.
Finden Sie mögliche Definitions- und Zielmengen für die folgenden Abbildungen:

$$f(x) = \sqrt{x-5} \quad , \quad g(x) = ggT(x, 12)$$

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{x-6} & , & \textit{falls } x \in \mathbb{N} \\ 12 - x & , & \textit{falls } x \notin \mathbb{N} \end{array} \right\} \quad , \quad i((x_1, x_2)) = \frac{x_1}{x_2 - 1} - \frac{x_2}{x_1 + 1}$$

(mögliche) Antwort:

$$\begin{array}{rrcllcl}
f: & [5, \infty[& \to & [0, \infty[& , & f(x) & = & \sqrt{x-5} \\
g: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & , & g(x) & = & \mathrm{ggT}(x, 12) \\
h: & \mathbb{R} \setminus \{6\} & \to & \mathbb{R} & , & h(x) & = & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{x-6} & , & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 12 - x & , & \text{falls } x \notin \mathbb{N} \end{array} \right\} \\
i: & (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{1\}) & \to & \mathbb{R} & , & i((x_1, x_2)) & = & \frac{x_1}{x_2 - 1} - \frac{x_2}{x_1 + 1}
\end{array}$$

Frage 7.4.
Wann gilt für zwei Abbildungen $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$, dass sie gleich sind (also $f = g$)?

(mögliche) Antwort: Falls sie sowohl die gleiche Definitionsmenge als auch die gleiche Zielmenge haben und außerdem jedes Element aus der Definitionsmenge durch f und g auf das gleiche Element abgebildet wird. Formaler: Für alle Abbildungen $f : D_f \to Z_f,\ g : D_g \to Z_g$ gilt

$$f = g \quad :\Leftrightarrow \quad [D_f = D_g \ \wedge\ Z_f = Z_g \ \wedge\ \forall x \in D_f : f(x) = g(x)]$$

Frage 7.5.
Unter welchen Bedingungen kann man zwei Abbildungen $f : A \to B$ *und* $g : C \to D$ **hintereinanderausführen**? *Was für ein Objekt erhält man dabei und wie ist es definiert?*

(mögliche) Antwort:

- Man kann g hinter f ausführen, wenn $B \subseteq C$ gilt. Man erhält dann erneut eine Abbildung $g \circ f$ (sprich: "g nach f", oder „g kringel f"). Diese ist wie folgt definiert:

$$g \circ f : A \to D \ , \ [g \circ f](a) = g\big(\ f(a) \ \big)$$

- Man kann f hinter g ausführen, wenn $D \subseteq A$ gilt. Man erhält dann erneut eine Abbildung $f \circ g$ (sprich: "f nach g"oder „f kringel g"). Diese ist wie folgt definiert:

$$f \circ g : C \to B \ , \ [f \circ g](c) = f\big(\ g(c) \ \big)$$

Mit $\circ$ werden Abbildungen verknüpft und man erhält eine neue Abbildung. Allerdings kann man zwei Abbildungen nicht immer mittels $\circ$ verknüpfen, es funktioniert nur, wenn die Zielmenge der zweiten Abbildung eine Teilmenge der Definitionsmenge der ersten Abbildung ist. Die Eckigen Klammern haben wir hier zur Hervorhebung benutzt; typischerweise werden diese weggelassen.

Aufgabe 7.6.

Gegeben sind im folgenden jeweils zwei Abbildungen f, g. Bestimmen Sie in jedem Aufgabenteil die Hintereinanderausführungen $f \circ g$ und $g \circ f$, falls diese existieren.

$$\begin{array}{lll}
(a) & f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} & , \; f(1)=2\;,\; f(2)=3\;,\; f(3)=4\;,\; f(4)=3 \\
 & g: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} & , \; g(x) = 5-x \\
(b) & f: \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R};\; y \geq 0\} & , \; f(x) = x^2 \\
 & g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} & , \; g(x) = \frac{-1}{x} \\
(c) & f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} & , \; f(n) = -3n+88 \\
 & g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & , \; g(z) = z^2+4 \\
(d) & f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & , \; f((x_1,x_2)) = x_1^2 - 2x_2 \\
 & g: \{x \in \mathbb{R};\; x \geq 0\} \to \mathbb{R}^2 & , \; g(x) = (\sqrt{x}, \frac{1}{2}x)
\end{array}$$

(mögliche) Antwort:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & f: & \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} & , \; f(1)=2\;,\; f(2)=3\;,\; f(3)=4\;,\; f(4)=3 \\
 & g: & \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} & , \; g(x)=5-x \\
 & f\circ g: & \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} & , \; (f\circ g)(1)=3\;,\; (f\circ g)(2)=4\;,\; (f\circ g)(3)=3\;,\; (f\circ g)(4)=2 \\
 & g\circ f: & \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} & , \; (g\circ f)(1)=3\;,\; (g\circ f)(2)=2\;,\; (g\circ f)(3)=1\;,\; (g\circ f)(4)=2 \\
\text{(b)} & f: & \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R};\; y \geq 0\} & , \; f(x)=x^2 \\
 & g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} & , \; g(x) = \frac{-1}{x} \\
 & f\circ g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} & , \; (f\circ g)(x) = \left(\frac{-1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \\
 & g\circ f: & \text{nicht definiert} & \\
\text{(c)} & f: & \mathbb{N} \to \mathbb{Z} & , \; f(n) = -3n+88 \\
 & g: & \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & , \; g(z) = z^2+4 \\
 & f\circ g: & \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & , \; (f\circ g)(z) = -3(z^2+4)+88 = -3z^2+76 \\
 & g\circ f: & \mathbb{N} \to \mathbb{N} & , \; (g\circ f)(n) = (-3n+88)^2+4 = 9n^2-528n+7748 \\
\text{(d)} & f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & , \; f((x_1,x_2)) = x_1^2 - 2x_2 \\
 & g: & \{x \in \mathbb{R};\; x \geq 0\} \to \mathbb{R}^2 & , \; g(x) = (\sqrt{x}, \frac{1}{2}x) \\
 & f\circ g: & \{x \in \mathbb{R};\; x \geq 0\} \to \mathbb{R} & , \; (f\circ g)(x) = \sqrt{x}^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x = 0 \\
 & g\circ f: & \text{nicht definiert} &
\end{array}$$

Teil II.

Beweismethoden und -formulierungen

8. Grundsätzliches zu Beweisen

Frage 8.1.
Was verstehen Sie unter einem Beweis (in der Mathematik)?

(mögliche) Antwort:

Ein Beweis ist in der Mathematik die **als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit einer Aussage** aus einer Menge von Axiomen, die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind. (vgl. wikipedia)

- Ein Beweis muss schlüssig sein, d.h. er darf keine Fehler enthalten. und ein Leser muss dies zweifelsfrei nachvollziehen können.
- Nach dem Lesen/Durcharbeiten/Verstehen eines Beweises muss der Leser absolut sicher sein, dass die Aussage stimmt.
- Innerhalb eines Beweises dürfen andere Aussagen benutzt werden, die bereits als richtig anerkannt worden sind. Dies ist beispielsweise der Fall:
  - -) bei Aussagen, die bereits zuvor bewiesen wurden
  - -) bei Axiomen (elementare, als gültig vorausgesetzte Aussagen)
  - -) Aussagen, die so offensichtlich gültig sind, dass sie nicht näher begründet werden müssen
    Hinweis: Bei Bedarf/auf Nachfrage sollte der Schreiber eines Beweises diese Aussagen genauer begründen können. Was im Rahmen eines Beweises als "offensichtlich" akzeptiert werden kann, hängt von Schreiber und Leser eines Beweises ab bzw. kann z.B. auch auf Absprachen zwischen ihnen beruhen.
- Ob eine Argumentation als Beweis akzeptiert werden kann, hängt auch vom Kenntnisstand der Leser ab.

Hinweis: Statt "Schreiber und Leser" könnte man besipielsweise auch "Dozent und Hörer" oder "Klausurteilnehmer und Korrektor"einsetzen.

Persönliche Meinung: Stellt sich einem die Frage „Muss ich das jetzt begründen", so ist die Antwort meist automatisch „ja". Bei den klaren Dingen fragt man sich meistens nicht nicht ob weitere Begründung notwendig ist.

Frage 8.2.
Wie lassen sich Beweise so formulieren, dass andere sie verstehen?

(mögliche) Antwort:

- Es muss vorab geklärt sein, welchen Kenntnisstand die Leser haben. Dadurch wird klar, ob bestimmte (bereits bewiesene) Aussagen benutzt werden dürfen und ob man gewisse Beweismethoden einfach verwenden kann, oder ob sie zusätzlich erläutert werden müssen.
- Grundsätzlich kann man Beweise auf vielerlei Arten formulieren. Man sollte dabei immer den Leser im Blick haben. (Ein Fließtext ohne Rechnungen ist nicht ausgeschlossen. Dabei ist allerdings zu erwarten, dass die Beweise sehr lang werden und nur mühsam zu lesen sind.)
- Speziell für das Mathematikstudium gilt: Es gibt gewisse Formulierungen, die mit bestimmten Beweismethoden verbunden sind und häufig verwendet werden (einige davon werden im Folgenden vorgestellt). Sowohl Schreiber als auch Leser von Beweisen müssen mit dieser "Sprache" (und den dahinter stehenden Methoden) vertraut sein.

Frage 8.3.

Wozu dienen Beweise im Rahmen einer mathematischen (Lehramts-)Ausbildung?

(mögliche) Antwort:

- Mathematik besteht nicht (nur) aus dem Anwenden auswendig gelernter Schemata. Stattdessen ist das Argumentieren und das Ziehen logischer Schlüsse ein zentraler Bestandteil von Mathematik. (Dies sollte sich auch im Unterricht aller Schulformen und Klassenstufen widerspiegeln.) Einen Beweis nachzuvollziehen oder gar selbst zu führen, verlangt genau dies: das Verständnis bzw. den Aufbau einer Kombination logischer Schlussfolgerungen

- Beweise dienen dazu, Kommunikation über Mathematik herzustellen. Der Schreiber des Beweises muss seine Gedankengänge präzise und nachvollziehbar darstellen, damit der Leser den Beweis verstehen kann. Umgekehrt muss der Leser in der Lage sein, die logische Argumentationskette, aus der der Beweis besteht, wieder aus den Formulierungen herauszuarbeiten.

- Beweise können nur verstanden oder erbracht werden, wenn man die inhaltlichen Zusammenhänge einer mathematischen Theorie verstanden hat. Sie verbinden ihre verschiedenen Teile und tragen so zu einem besseren Verständnis ihres gesamten (logisch strukturierten) Aufbaus bei.

Frage 8.4.

Wie kann man einen Beweis nachvollziehen?

(mögliche) Antwort:

- Es gibt gewisse Prinzipien bzw. Methoden, die beim Beweisen angewendet werden können (einige davon werden im Folgenden vorgestellt). Machen Sie sich grundsätzlich klar, wie (UND WARUM) sie funktionieren. Kontrollieren Sie beim Lesen eines Beweises, ob sie korrekt angewendet wurden.
- Machen Sie sich grundsätzlich mit dem Formalismus vertraut, der in den Beweisen benutzt wird, die Sie lesen. Ein Beweis kann nur nachvollzogen werden, wenn man alle darin vorkommenden Formulierungen versteht.
- Machen Sie sich zunächst (präzise) die Aussage klar, die gezeigt werden soll. Wenn ein Objekt vorkommt, dessen Definition nicht kennen, schlagen Sie sie nach.
- PRÜFEN SIE JEDEN EINZELNEN SCHRITT DES BEWEISES. Vertrauen Sie den Schlussfolgerungen erst, wenn Sie sie verstanden haben. Suchen Sie nach Fehlern in der Argumentation und fragen Sie bei Unklarheiten (wenn möglich) nach.
- Wird eine andere (zuvor bereits bewiesene) Aussage im Beweis benutzt, machen Sie sich zunächst (präzise) diese Aussage klar.
- In den meisten Fällen ist es viel einfacher, einen Beweis zu verstehen/nachzuvollziehen/zu prüfen, als ihn selbst zu finden. (Manchmal wird ein Trick verwendet oder eine Idee eingesetzt, mit der Sie (noch) nicht vertraut sind.) Fragen Sie sich nicht immer sofort, woher die Beweisidee kommt, sondern versuchen sie zunächst, einfach nur den Beweis nachzuvollziehen. (Das ist der erste Schritt.)
- Nach dem Verständnis eines Beweises sollten Sie davon überzeugt sein, dass der Beweis keinen Fehler und keine Lücke enthält und dass die soeben bewiesene Aussage stimmt.

Frage 8.5.

Wie kann man einen Beweis selber finden?

(mögliche) Antwort:

Dies ist meist schwieriger als das Verstehen eines (gut formulierten) Beweises. Der Schwierigkeitsgrad hängt dabei von der zu beweisenden Aussage und den vorhandenen Hilfsmitteln (Aussagen, die bereits beweisen wurden und daher verwendet werden dürfen) ab und reicht "von einfach bis unmöglich".

Es gibt kein "Rezept" zum Finden von Beweisen. Daher nur einige Ratschläge:

- Lernen Sie zuerst, Beweise zu verstehen und Fehler in Beweisen zu finden (vgl. Frage 8.4). Dann können Sie Ihre eigenen Beweise einer Prüfung auf Korrektheit unterziehen und so lernen, Fehler zu vermeiden.
- Arbeiten Sie in Gruppen. Prüfen Sie ihre Ideen gegenseitig und erklären Sie sie sich.
- Falls Sie einen Fehler in Ihrer Argumentation finden, überlegen Sie, ob man die Argumentation noch "retten" kann. Falls nicht, verwerfen Sie Ihren Beweisansatz und überlegen Sie neu.
- Versuchen Sie sich an ähnliche Aussagen zu erinnern, bei denen Sie einen Beweis bereits gesehen haben. Versuchen Sie, ob die Methode, die bei diesen Aussagen zu einem Beweis geführt haben, auch hier funktioniert. (Kopieren Sie aber nicht einfach die Methode sondern denken Sie sorgfältig darüber nach, ob eventuell eine Modifikation oder Ergänzung nötig ist.)
- Prägen Sie sich Methoden ein, die häufig zum Erfolg führen. Machen Sie sich Definitionen und zuvor bereits bewiesene Aussagen, die häufig in Beweisen Verwendung finden, klar und prägen Sie sie sich ein.
- Beweise finden ist keine Fähigkeit (die man entweder haben kann oder nicht) sondern eine Fertigkeit, die man trainieren kann. Verbesserungen erreichen Sie immer dann, wenn Sie Beweise nachvollziehen, prüfen oder selbst erstellen. Also: ÜBEN, ÜBEN, ÜBEN, ...

9. Gleichungen und Ungleichungen

9.1. Gleichungen zwischen Zahlen

Zu zeigen ist, dass zwei Zahlen gleich sind. *Man kann wie folgt vorgehen:*

Der Beweis besteht aus einer Rechnung, die mit der einen der beiden Zahlen beginnt und mit der Anderen endet. Darin kommen nur Gleichheitszeichen vor, die alle (ggf. mit Hilfe einer geeigneten Anmerkung) offensichtlich richtig sind. Am Ende kann man dann folgern, dass die Gleichheit zwischen den beiden Zahlen (die nun ganz links und ganz rechts in der Gleichungskette stehen) gültig ist.

Behauptung:	$a = b$
Beweis:	$a = \ldots = b$

Beispiel:

- *Behauptung: Es gilt:* $17 \cdot 44 + 5 = (257 - 6) \cdot 3$
  Beweis: $17 \cdot 44 + 5 = 748 + 5 = 753 = 251 \cdot 3 = (257 - 6) \cdot 3$
- *Behauptung: Es gilt:* $999 \cdot 1001 = 999999$
  Beweis 1: $999 \cdot 1001 = (1000 - 1) \cdot (1000 + 1) \overset{(*)}{=} 1000^2 - 1^2 = 1000000 - 1 = 999999$
  (zu $(*)$: dritte binomische Formel wurde verwendet)
  Beweis 2: $999 \cdot 1001 = 999 \cdot (1000 + 1) \overset{(*)}{=} 999 \cdot 1000 + 999 \cdot 1 = 999000 + 999 = 999999$
  (zu $(*)$: Distributivgesetz wurde verwendet)
- *Behauptung: Es gilt:* $1 + 2 + 3 + \ldots + 2022 = \frac{2022 \cdot 2023}{2}$
  Beweis:

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + 3 + \ldots + 2022 \\
\overset{(*)}{=}\; & \underbrace{(1 + 2022)}_{=2023} + \underbrace{(2 + 2021)}_{=2023} + \underbrace{(3 + 2020)}_{=2023} + \ldots + \underbrace{(1011 + 1012)}_{=2023} \\
\overset{(**)}{=}\; & \frac{2022}{2} \cdot 2023 \\
=\; & \frac{2022 \cdot 2023}{2}
\end{aligned}
$$

zu $(*)$: *Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition / Binomische Formel wurden verwendet.*
zu $(**)$: *Die geschweiften Klammern in der Zeile darüber bilden eine Erklärung dafür, dass das Gleichheitszeichen stimmt. Außerdem muss man sich klarmachen, dass genau $\frac{2022}{2}$ dieser geschweiften Klammern vorkommen.*

9.2. Ungleichungen zwischen Zahlen

Zu zeigen ist, dass eine Zahl kleiner (bzw. kleiner oder gleich) einer anderen ist. *Man kann wie folgt vorgehen:*

Der Beweis besteht aus einer Rechnung, die mit der einen der beiden Zahlen beginnt und mit der Anderen endet. Darin kommen nur die Zeichen $<$, $=$ *und* $\leq$ *vor, die alle (ggf. mit Hilfe einer geeigneten Anmerkung) offensichtlich richtig sind. Am Ende kann man dann folgern, dass die Zahl, die ganz links in der Rechnung steht, kleiner oder gleich der Zahl, die ganz rechts steht, ist. Falls mindestens einmal das Zeichen* $<$ *vorkam, kann man sogar folgern, dass die Zahl, die ganz links in der Rechnung steht, kleiner der Zahl, die ganz rechts steht, ist.*

Beh:	$a \leq b$	*Beh:*	$a < b$
Bew:	$a \leq \ldots < \ldots = \ldots \leq b$	*Bew:*	$a \leq \ldots < \ldots = \ldots \leq b$
			(mindestens einmal muss $<$ *vorkommen)*

Für $\geq$ *oder* $>$ *funktioniert das Ganze natürlich analog.*

Beispiel:

- *Behauptung:* *Es gilt:* $456 \cdot 55 + 3 < 50000$
  Beweis: $456 \cdot 55 + 3 < 456 \cdot 55 + 55 = 457 \cdot 55 < 500 \cdot 100 = 50000$
- *Behauptung:* *Es gilt:* $\frac{4}{9} \geq \frac{5}{13}$
  Beweis: $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 13}{9 \cdot 13} = \frac{52}{9 \cdot 13} \geq \frac{45}{9 \cdot 13} = \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 13} = \frac{5}{13}$

- *Behauptung:* *Es gilt:* $\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$
  Beweis:

$$\sqrt{3}+\sqrt{5} \overset{(1)}{=} \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2} \overset{(2)}{=} \sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$$
$$\overset{(3)}{=} \sqrt{3+5+2\cdot\sqrt{15}}$$
$$\overset{(4)}{<} \sqrt{3+5+2\cdot\sqrt{16}} = \sqrt{8+2\cdot 4} = \sqrt{16} = 4$$

Wenn man diesen Beweis nachvollziehen möchte, muss man jeden einzelnen Schritt prüfen. Dabei helfen folgende Anmerkungen:

(1) Die (bereits bekannte) Aussage $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+ : x=\sqrt{x^2}}$ *wurde angewendet auf* $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$. *(Dabei ist klar, dass* $\sqrt{3}+\sqrt{5}\in\mathbb{R}^+$ *ist und man die Aussage darauf anwenden kann.)*

(2) Die (bereits bekannte) erste binomische Formel besagt: $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R} : (a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$. *Sie wurde angewendet auf* $a=\sqrt{3}$ *und* $b=\sqrt{5}$.

(3) Es wurden die (bereits bekannten) Aussagen:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+ : \sqrt{x}^2=x} \quad \textit{und} \quad \boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}^+ : \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}}$$

verwendet.

(4) Aus der (bereits bekannten) Aussage $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R}^+ : \left(a<b\Rightarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}\right)}$ *folgt:* $\sqrt{15}<\sqrt{16}$. *Daraus ergibt sich:* $2\cdot\sqrt{15}<2\cdot\sqrt{16}$, *daraus dann* $3+5+2\cdot\sqrt{15}<3+5+2\cdot\sqrt{16}$ *und daraus dann (wende nochmals obige Aussage an):* $\sqrt{3+5+2\cdot\sqrt{15}}<\sqrt{3+5+2\cdot\sqrt{16}}$
(Bei dieser Argumentation ist auch wichtig, dass Ungleichungen erhalten bleiben, wenn man beide Seiten mit einer positiven Zahl multipliziert bzw. wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert. Auch dies ist bereits bekannt.)

9.3. Einsatz von (bereits bekannten) $\forall$-Aussagen

Bei vielen bereits im Vorfeld bekannten Aussagen (die innerhalb eines Beweises benutzt werden dürfen) handelt es sich um $\forall$-Aussagen. Diese können jederzeit nach Belieben verwendet werden und man darf für die darin vorkommenden Variablen einsetzen, was immer man möchte: bespielsweise eine Zahl, eine andere (im Beweis gerade vorkommende) Variable oder einen zusammengesetzten Ausdruck aus Zahlen und Variablen (einen "Term"). Man muss lediglich sicherstellen, dass das was man einsetzt, in der bekannten $\forall$-Aussage ein zugelassenes Objekt ist.
In obigen Beweisen finden Sie dazu zahlreiche Beispiele, weitere werden folgen. Man verwendet bereits bekannte $\forall$-Aussagen sehr oft (nicht nur in Beweisen).

Aufgabe 9.4.

Setzen Sie die folgenden Teile zu einem Beweis der jeweils angegebenen Aussage zusammen oder entwickeln Sie einen eigenen Beweis dazu (Jeder Schritt des Beweises muss nachvollziehbar sein.)

(a) *Behauptung:* $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = 30$

Beweisteile:

$\boxed{\overset{(\clubsuit)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\spadesuit)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\heartsuit)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\diamondsuit)}{=}}$

$\boxed{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}$ $\boxed{30}$ $\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5}$

$\boxed{\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\right)}$ $\boxed{\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}\right)}$

$\clubsuit$*: Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation*

$\spadesuit$: $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \ \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$\heartsuit$: $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : \ \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

$\diamondsuit$*: klar*

(b) *Behauptung:* $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \frac{1}{11}$

Beweisteile:

$\boxed{\overset{(\clubsuit)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\spadesuit)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\heartsuit)}{<}}$

$\boxed{\frac{1}{11}}$ $\boxed{\frac{1}{12}}$ $\boxed{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{4}{12} - \frac{3}{12}}$

$\boxed{\clubsuit\text{: Erweitern}}$ $\boxed{\spadesuit\text{: klar}}$ $\boxed{\heartsuit\text{: } \forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \left(x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right)}$

(mögliche) Antwort:

(a) Behauptung: $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = 30$

Beweis:

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15} \overset{(\heartsuit)}{=} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right) \overset{(\clubsuit)}{=} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\right) \overset{(\spadesuit)}{=} 2\cdot3\cdot5 \overset{(\diamondsuit)}{=} 30$$

$\boxed{\clubsuit\text{: Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation}}$

$\boxed{\spadesuit\text{: } \forall x \in \mathbb{R}_0^+ :\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x}$ $\boxed{\heartsuit\text{: } \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ :\ \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}$ $\boxed{\diamondsuit\text{: klar}}$

(b) Behauptung: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \frac{1}{11}$

Beweis:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \overset{(\clubsuit)}{=} \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \overset{(\spadesuit)}{=} \frac{1}{12} \overset{(\heartsuit)}{<} \frac{1}{11}$$

$\boxed{\clubsuit\text{: Erweitern}}$ $\boxed{\spadesuit\text{: klar}}$ $\boxed{\heartsuit\text{: } \forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \left(x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right)}$

10. Aussagen mit Quantoren $\exists$ und $\forall$

10.1. Beweis von Existenzaussagen

Eine $\boxed{\exists\text{-}Aussage}$ *kann gezeigt werden, indem man ein entsprechendes Objekt "einfach" angibt und dann nachweist, dass die geforderte Eigenschaft erfüllt ist.*

Behauptung:	$\exists x \in X$ *mit der Eigenschaft* $A(x)$
Beweis:	• *Setze/Wähle/Definiere/Betrachte* $x := \ldots$.
	• *Prüfe (falls nötig), dass* $x \in X$ *ist.*
	• *Zeige* $A(x)$ *(für das eine selbstgewählte* x*).*

Beispiel:

- *Behauptung:* $\exists x \in \mathbb{Q}: \; 8x + 5 = -13$
  Beweis: *Setze* $x := -\frac{9}{4}$*. Dann gilt:*
  $$8x + 5 = 8 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 5 = -13$$
- *Behauptung:* $\exists x \in \mathbb{R}: \; x^2 + 5 = 12$
  Beweis: *Setze* $x := \sqrt{7}$.
  Hinweis: Alternativ wäre hier auch $x := -\sqrt{7}$ möglich gewesen.
  $$\textit{Dann gilt:} \quad x^2 + 5 = \sqrt{7}^{\,2} + 5 = 7 + 5 = 12$$
- *Behauptung:* $\exists x \in [2, 3]: \; x^2 + 5 = 12$
  Beweis: *Setze* $x := \sqrt{7}$.
  Wegen $\sqrt{7} \geq \sqrt{4} = 2$ *und* $\sqrt{7} \leq \sqrt{9} = 3$ *ist* $x \in [2, 3]$. *Es gilt:* $x^2 + 5 = \sqrt{7}^{\,2} + 5 = 7 + 5 = 12$
- *Behauptung:* $\exists x, y \in \mathbb{Z}: \; x^3 + y^3 = 1385$
  Beweis: *Setze* $x := 12$ *und* $y := -7$*. Dann gilt:* $x^3 + y^3 = 12^3 + (-7)^3 = 1728 - 343 = 1385$
  Hinweis: Es ist absolut nicht klar, wie man hierbei die Zahlen x, y findet. Dennoch ist der Beweis schlüssig und leicht nachvollziehbar (aber nicht leicht zu finden).

10.2. Beweis von $\forall$-Aussagen

Eine $\boxed{\forall\text{-}Aussage}$ *kann wie folgt gezeigt werden: Man wählt ein (beliebiges*, aber festes) Objekt aus der Menge der zugelassenen Objekte. Dafür verwendet man üblicherweise die Sprechweise:* $\boxed{Sei \ldots \in \ldots.}$ *Dieses feste gewählte Objekt steht dabei stellvertretend für alle zugelassenen Objekte. Daher genügt es im Folgenden, die zu zeigende Aussageform für dieses eine Objekt beweisen. (Dieses ist dabei als unbekannt zu behandeln, man weiß nur, dass es in der Menge der zugelassenen Objekte liegt.)*

Hinweis: (zu *) "beliebig" bedeutet hier nicht, dass man ein bestimmtes Objekt auswählt, sondern ist eher im Sinne von "repräsentativ" zu verstehen.

Behauptung:	$\forall x \in X$ *gilt* $A(x)$
Beweis:	• *Sei* $x \in X$.
	• *Zeige* $A(x)$ *(verwende dabei nur das Wissen, dass* $x \in X$ *ist).*

Beispiel:

- *Behauptung:* $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x+y)^2 = x^2 + 2x + y^2$
  Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:* $(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y = x^2 + 2x + y^2$
  Hinweis: Hierbei wurden elementare Rechengesetze (etwa Distributivgesetz, Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation) verwendet. Dies ist möglich, da es sich dabei um $\forall$-Aussagen handelt, die jederzeit eingesezt werden können.

- *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R}: \ (x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$
  Beweis 1: Sei $x \in \mathbb{R}$. *Es gilt:*

  $$(x+1)^2 - (x-1)^2 \overset{(*)}{=} x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$$

  (zu $(*)$*: zweimaliges Verwenden der binomischen Formel)*
  Beweis 2: Sei $x \in \mathbb{R}$. *Es gilt:* $(x+1)^2 - (x-1)^2 \overset{(*)}{=} \big((x+1)+(x-1)\big)\cdot\big((x+1)-(x-1)\big) = 2x\cdot 2 = 4x$
  (zu $(*)$*: Die 3.binomische Formel lautet:* $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$. *Sie wird hier angewendet auf* $a = x+1$ *und* $b = x-1$.*)*

- *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 + 8x + 17 > 0$
  Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. *Es gilt:* $x^2 + 8x + 17 = x^2 + 2\cdot 4x + 4^2 + 1 = (x+4)^2 + 1 \overset{(*)}{\geq} 0 + 1 = 1 > 0$
  (zu $(*)$*: Hier wird verwendet, dass* $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq 0$ *gilt. Diese allgemeingültige Aussage wrid auf* $y = x+4$ *angewendet.)*

Manchmal wird (beispielsweise in einem Vorlesungsskript oder auf einem Übungsblatt) die Formulierung "Sei(en) ..." vorausgeschickt. Dann folgt erst die Behauptung, in der das x *ohne Quantor vorkommt.*

Da das x *hierbei wiederum* **fest, aber beliebig** *ist, steht es repräsentativ* $\forall x \in X$. *Im Beweis ist* x *als unbekannt zu behandeln, man weiß nur, dass es in* X *liegt. (Man braucht das "Sei(en) ..." aber nicht nochmals hinzuschreiben.) Gezeigt wird dabei natürlich dabei die entsprechende* $\forall$*-Aussage.*

Beispiel:

- *Sei* $x \in \mathbb{R}$.
  <u>Behauptung:</u> $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
  <u>Beweis:</u> $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$
  (Gezeigt wurde dabei die Aussage: $\quad \forall x \in \mathbb{R}: \; x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$*)*

- *Seien* $a \in \mathbb{R}$ *und* $n, m \in \mathbb{N}$.
  <u>Behauptung:</u> $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
  <u>Beweis:</u> $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n\text{-}mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{m\text{-}mal} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{(n+m)\text{-}mal} = a^{n+m}$
  (Gezeigt wurde dabei die Aussage: $\quad \forall a \in \mathbb{R} \forall n, m \in \mathbb{N}: \; a^{n+m} = a^n \cdot a^m$*)*
  Hinweis: Hier wurde zweimal die folgende Definition von Potenzen benutzt:

  $$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ wird definiert:} \quad x^k := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{k\text{-mal}}$$

Aufgabe 10.3.

Setzen Sie die folgenden Teile zu einem Beweis der jeweils angegebenen Aussage zusammen oder entwickeln Sie einen eigenen Beweis dazu (Jeder Schritt des Beweises muss nachvollziehbar sein.)

ACHTUNG: *Sie benötigen nicht alle Beweisteile.*

(a) *Behauptung:* $\exists x \in \mathbb{R}: \ (4+x)^2 = 7$

Beweisteile:

$\boxed{\textit{Dann gilt:}}$ $\boxed{\text{Sei } x \in \mathbb{R}.}$ $\boxed{\text{Setze } x = \sqrt{7} - 4.}$ $\boxed{\text{Setze } x = \sqrt{7} + 4.}$

$\boxed{7}$ $\boxed{(4+x)^2}$ $\boxed{(\sqrt{7})^2}$ $\boxed{(4+\sqrt{7}-4)^2}$ $\boxed{(4+\sqrt{7}-4)^2}$

$\boxed{\overset{(x\ \text{einsetzen})}{=}}$ $\boxed{\overset{(\forall y \in \mathbb{R}^+ :\ (\sqrt{y})^2) = y)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\text{vereinfachen})}{=}}$

(b) *Behauptung:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{3}{a+b+c}$

Beweisteile:

$\boxed{\textit{Dann gilt:}}$ $\boxed{\textit{Seien } a, b, c \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\textit{Setze } a = 1,\ b = 2 \textit{ und } c = 3.}$

$\boxed{\overset{(\clubsuit)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\spadesuit)}{>}}$

$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ $\boxed{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ $\boxed{\frac{3}{a+b+c}}$ $\boxed{\frac{3}{1+2+3}}$

$\boxed{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c}}$ $\boxed{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}$

$\boxed{\clubsuit\textit{: Zusammenfassen}}$ $\boxed{\spadesuit\textit{: denn } a < a+b+c \textit{ und } b < a+b+c \textit{ und } c < a+b+c}$

(mögliche) Antwort:

(a) Behauptung: $\exists x \in \mathbb{R} : \ (4 + x)^2 = 7$

Beweis: Setze $x = \sqrt{7} - 4$. Dann gilt:

$$(4+x)^2 \overset{(x \text{ einsetzen})}{=} (4 + \sqrt{7} - 4)^2 \overset{(\text{vereinfachen})}{=} (\sqrt{7})^2 \overset{(\forall y \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{y}^2 = y)}{=} 7$$

(b) Behauptung: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{3}{a+b+c}$

Beweis: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \overset{(\spadesuit)}{>} \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} \overset{(\clubsuit)}{=} \frac{3}{a+b+c}$$

$\boxed{\clubsuit\text{: Zusammenfassen}}$ $\boxed{\spadesuit\text{: denn } a < a+b+c \text{ und } b < a+b+c \text{ und } c < a+b+c}$

10.4. Beweis von Aussagen, in denen mehrere Quantoren vorkommen

Interessant wird es, wenn es um Aussagen geht, in denen sowohl $\forall$ und $\exists$ vorkommt. Dabei ist natürlich die Reihenfolge zu beachten. Grundsätzlich ist es sinnvoll, die Aussage von vorne nach hinten durchzugehen, um den Beweis zu strukturieren.

Behauptung:	$\forall x \in X \ \exists y \in Y: \ A(x,y)$
Beweis:	• *Sei* $x \in X$. • *Setze* $y := \ldots$ *(hier darf auch* x *benutzt werden)* • *Prüfe (falls nötig), dass* $y \in Y$ *ist.* • *Zeige* $A(x,y)$ *(dabei darf für* y *das gewählte Objekt eingesetzt werden,* x *ist als beliebig zu behandeln)*

Behauptung:	$\exists x \in X \ \forall y \in Y: \ A(x,y)$
Beweis:	• *Setze* $x := \ldots$ *(hier darf* y *nicht benutzt werden).* • *Prüfe (falls nötig), dass* $x \in X$ *ist.* • *Sei* $y \in Y$. • *Zeige* $A(x,y)$ *(dabei darf für* x *das gewählte Objekt eingesetzt werden,* y *ist als beliebig zu behandeln)*

Beispiel:

- *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \exists y \in \mathbb{R}_0^+: \ y^2 = x$
  Beweis: *Sei* $x \in \mathbb{R}_0^+$. *Setze* $y := \sqrt{x}$. *Dann gilt* $y \in \mathbb{R}_0^+$ *und* $y^2 = \sqrt{x}^{\,2} = x$
  Hinweis: y darf hier in Abhängigkeit von x definiert werden, da die Behauptung besagt, dass es zu jedem x (mindestens) ein entsprechendes y gibt.

- *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \exists y \in \mathbb{R}^+: \ (y-1)^2 = x$
  Beweis: *Sei* $x \in \mathbb{R}_0^+$. *Setze* $y := \sqrt{x} + 1$. *Dann gilt* $y \in \mathbb{R}^+$ *(denn es ist* $y = \sqrt{x} + 1 \geq 0 + 1 > 0$*) und*
  $$(y-1)^2 = (\sqrt{x} + 1 - 1)^2 = \sqrt{x}^{\,2} = x$$
  Hinweis: Damit der Beweis gültig ist, musste klar sein, dass das gewählte y tatsächlich (mit Sicherheit) $\in \mathbb{R}^+$ ist. Dies wurde (in der Klammer) separat begründet.

- *Behauptung:* $\exists n \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: \ n \cdot x = x$
  Beweis: *Setze* $n := 1$. *Sei* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:* $n \cdot x = 1 \cdot x = x$
  Hinweis: n muss hier unabhängig von x definiert werden, da die Behauptung besagt, dass es (mindestens) ein n gibt, das mit allen x die geforderte Gleichheit erfüllt.

- *Behauptung:* $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}: \ b > a$
  Beweis: *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Setze* $b := a + 1$ *(auch funktioniert hätte beispielsweise* $b = a + 17$*). Dann gilt* $b = a + 1 > a$.

- *Behauptung:* $\exists a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}: \ b > a$
  Beweis: *nicht möglich, denn die Behauptung ist falsch*
  (man müsste zuerst a *angeben und dann – mit diesem gewählten* a *– für ein beliebiges (d.h. repräsentatives)* b *die Ungleichung zeigen)*

- *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall y \in \mathbb{R} \ \exists z \in \mathbb{R}: \ y = z \cdot x$
  Beweis: *Sei* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und sei* $y \in \mathbb{R}$. *Setze* $z := \frac{y}{x}$. *Dann ist* $z \cdot x = \frac{y}{x} \cdot x = y$.

- *Behauptung:* $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall c \in \mathbb{R}:\ abc = 2c$
  Beweis: *Sei* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Setze* $b := \frac{2}{a}$ *(offensichtlich* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*). Sei* $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Dann gilt:} \quad abc = a \cdot \frac{2}{a} \cdot c = 2c$$

- *Behauptung:* $\exists a \in \mathbb{N}\ \forall b, c \in \mathbb{N}\ \exists d \in \mathbb{Z}:\ ab = 4(c + d)$
  Beweis 1: *Setze* $a := 4$. *Seien* $b, c \in \mathbb{N}$. *Setze* $d := b - c$.

$$\text{Dann gilt:} \quad 4(c + d) = 4(c + (b - c)) = 4b = ab$$

  Beweis 2: *Setze* $a := 8$. *Seien* $b, c \in \mathbb{N}$. *Setze* $d := 2b - c$.

$$\text{Dann gilt:} \quad 4(c + d) = 4(c + (2b - c)) = 4 \cdot 2b = 8b = ab$$

Aufgabe 10.5.

Setzen Sie die folgenden Teile zu einem Beweis der jeweils angegebenen Aussage zusammen oder entwickeln Sie einen eigenen Beweis dazu (Jeder Schritt des Beweises muss nachvollziehbar sein.)

ACHTUNG: *Sie benötigen nicht alle Beweisteile.*

(a) *Behauptung:* $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ \exists z \in \mathbb{Q}:\ z + y = x$

Beweisteile:

Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. | *Sei* $z \in \mathbb{Q}$. | *Setze* $z = x - y$. | *Setze* $z = y - x$. | *Setze* $x = z + y$.

Setze $x = 3$ *und* $y = 2$ *und* $z = 1$.

(beachte: $z \in \mathbb{Q}$, *da* $x, y \in \mathbb{Q}$*)* | *(beachte:* $x \in \mathbb{Q}$, *da* $y, z \in \mathbb{Q}$*)* | *(beachte:* $x, y, z \in \mathbb{Q}$*)*

$z + y$ | x | $(x - y) + y$ | $x - y$ | $2 + 1$ | 3 | $=$ | $=$ | $=$

(b) <u>*Behauptung:*</u> $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}:\ n^m \leq m^n$

<u>*Beweisteile:*</u>

$\boxed{\textit{Sei } n \in \mathbb{N}.}$ $\boxed{\textit{Sei } m \in \mathbb{N}.}$

$\boxed{\textit{Setze } n = 1.}$ $\boxed{\textit{Setze } m = 1.}$ $\boxed{\textit{Setze } n = m.}$ $\boxed{\textit{Setze } m = n.}$

$\boxed{n^1}$ $\boxed{1^n}$ $\boxed{m^1}$ $\boxed{1^m}$ $\boxed{n^n}$ $\boxed{m^m}$ $\boxed{n^m}$ $\boxed{m^n}$ $\boxed{1}$ $\boxed{n}$ $\boxed{m}$

$\boxed{\overset{(n \text{ einsetzen})}{=}}$ $\boxed{\overset{(n \text{ einsetzen})}{=}}$ $\boxed{\overset{(m \text{ einsetzen})}{=}}$ $\boxed{\overset{(m \text{ einsetzen})}{=}}$

$\boxed{\overset{(\text{Potenzgesetz})}{=}}$ $\boxed{\overset{(\text{Potenzgesetz})}{=}}$ $\boxed{\overset{(\text{da } n \in \mathbb{N}^*)}{\leq}}$ $\boxed{\overset{(\text{da } m \in \mathbb{N}^*)}{\leq}}$

(c) *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists y \in \mathbb{R}^+ \ \forall z \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{1}{y+z} \leq x$

Beweisteile:

$\boxed{\text{Sei } x \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\text{Sei } y \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\text{Sei } z \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\text{Seien } x, z \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\text{Seien } x, y, z \in \mathbb{R}^+.}$

$\boxed{\text{Setze } x = \frac{1}{y+z} + 1.}$ $\boxed{\text{Setze } y = \frac{1}{x}.}$ $\boxed{\text{Setze } z = \frac{1}{x}.}$

$\boxed{\frac{1}{y+z}}$ $\boxed{\frac{1}{(\frac{1}{x})}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\frac{1}{(\frac{1}{x}+z)}}$ $\boxed{\frac{1}{(y+\frac{1}{x})}}$

$\boxed{\overset{\clubsuit}{\leq}}$ $\boxed{\overset{\clubsuit}{\geq}}$ $\boxed{\overset{\clubsuit}{=}}$ $\boxed{\overset{\spadesuit}{\leq}}$ $\boxed{\overset{\spadesuit}{\geq}}$ $\boxed{\overset{\spadesuit}{=}}$ $\boxed{\overset{\heartsuit}{\leq}}$ $\boxed{\overset{\heartsuit}{\geq}}$ $\boxed{\overset{\heartsuit}{=}}$ $\boxed{\overset{(x \text{ einsetzen})}{=}}$ $\boxed{\overset{(y \text{ einsetzen})}{=}}$ $\boxed{\overset{(z \text{ einsetzen})}{=}}$

$\boxed{\clubsuit\text{: beachte } y + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \text{ wegen } y \in \mathbb{R}^+}$ $\boxed{\spadesuit\text{: beachte } z + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \text{ wegen } z \in \mathbb{R}^+}$

$\boxed{\heartsuit\text{: beachte } \forall a \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{1}{(\frac{1}{a})=a}}$

(mögliche) Antwort:

(a) Behauptung: $\forall x, y \in \mathbb{Q} \ \exists z \in \mathbb{Q} : \ z + y = x$

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. Setze $z = x - y$. (beachte: $z \in \mathbb{Q}$, da $x, y \in \mathbb{Q}$)

$$z + y = (x - y) + y = x$$

(b) Behauptung: $\exists n \in \mathbb{N}^* \ \forall m \in \mathbb{N}^* : \ n^m \leq m^n$

Beweis: Setze $n = 1$. Sei $m \in \mathbb{N}$.

$$n^m \overset{(n \text{ einsetzen})}{=} 1^m \overset{(\text{Potenzgesetz})}{=} 1 \overset{(\text{da } m \in \mathbb{N})}{\leq} m \overset{(\text{Potenzgesetz})}{=} m^1 \overset{(n \text{ einsetzen})}{=} m^n$$

(c) Behauptung: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists y \in \mathbb{R}^+ \ \forall z \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{1}{y+z} \leq x$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^+$. Setze $y = \frac{1}{x}$. Sei $z \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{1}{y+z} \overset{(y \text{ einsetzen})}{=} \frac{1}{(\frac{1}{x} + z)} \overset{\spadesuit}{\leq} \frac{1}{(\frac{1}{x})} \overset{\heartsuit}{=} x$$

$\boxed{\spadesuit\text{: beachte } z + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \text{ wegen } z \in \mathbb{R}^+}$ $\boxed{\heartsuit\text{: beachte } \forall a \in \mathbb{R}^+ : \ \frac{1}{(\frac{1}{a})} = a}$

10.6. Einsatz von (bereits bekannter) Existenzaussagen

Bisher hatten wir Existenzbeweise geführt, indem wir ein passendes Objekt angegeben haben ("Setze ..."). Man kann aber auch auf bereits bekannte Existenzaussagen zurückgreifen: Wird durch eine solche Aussage die Existenz von Objekten mit einer bestimmten Eigenschaft garantiert, so kann man solche Objekte "wählen" und sie dann benutzen und auf ihre Eigenschaft zurückgreifen (obwohl man sie nicht kennt).

Beispiel:

- *bereits bekannte Aussage* $(*)$: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \ \exists b \in \mathbb{R}^+$ *mit* $b^2 = a$
  Behauptung: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \ \exists b \in \mathbb{R}^+$ *mit* $b^4 = a$
  Beweis: *Sei* $a \in \mathbb{R}^+$. $\boxed{\text{Wähle}}$ $c \in \mathbb{R}^+$ *mit* $c^2 = a$. *Dies geht nach* $(*)$.
  Hinweis: Die $\forall$-Aussage $(*)$ wird angewendet auf a. Man erhält eine $\exists$-Aussage, die garantiert, dass es ein Element c wie behauptet gibt. Man kann daher ein Element c wählen und damit weiterarbeiten. Man weiß allerdings nur, dass $c \in \mathbb{R}^+$ ist und dass $c^2 = a$ ist und kennt nicht den Wert von c.
  $\boxed{\text{Wähle}}$ $b \in \mathbb{R}^+$ *mit* $b^2 = c$. *Dies geht nach* $(*)$.
  Hinweis: Die $\forall$-Aussage $(*)$ wird nochmals angewendet, diesmal auf c. Man erhält eine $\exists$-Aussage, die garantiert, dass es ein Element b wie behauptet gibt. Daher kann man solch ein Element wählen und damit weiterarbeiten.
  Nun folgt: $\quad a = c^2 = (b^2)^2 = b^4$

- *bereits bekannte Aussage* $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: \ n > x$
  Behauptung: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n} < x$
  Beweis: *Sei* $x \in \mathbb{R}^+$.
  Wendet man $(*)$ *auf* $\frac{1}{x}$ *(statt* x *an), so folgt:* $\quad \exists n \in \mathbb{N}: \ n > \frac{1}{x}$
  Wir wählen solch ein $n \in \mathbb{N}$.
  Hinweis: Das heißt, wir wissen jetzt, dass $n \in \mathbb{N}$ ist und dass $n > \frac{1}{x}$ ist, auch wenn wir n nicht genau kennen. Das "wählen" eines solchen n ist nur möglich, weil wir wissen, dass (mindestens) so ein n existiert.
  Nun folgt: $\quad \frac{1}{n} < \frac{1}{1/x} = x$
  (Hierbei wurde benutzt: $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ *mit* $a > b$ *gilt:* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$*)*

- *<u>bereits bekannte Aussage $(*)$:</u>* $\forall a, b \in \mathbb{N}\ \exists u, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $u \cdot a + v \cdot b = ggT(a, b)$

  <u>Behauptung:</u> $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $17u + 55v = 4$

  <u>Beweis:</u> $\boxed{\textit{Wähle}}$ $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{Z}$ *mit* $17\tilde{u} + 55\tilde{v} = ggT(17, 55) = 1$. *Dies geht nach* $(*)$ *angewendet auf* $a = 17$ *und* $b = 55$.

  Hinweis: Damit man diese Elemente "wählen" kann, muss garantiert sein, dass sie überhaupt existieren. Dies ist hier wegen $(*)$ gesichert. Nun kann man auf Zahlen $\tilde{u}, \tilde{v}$ zurückgreifen, die man zwar nicht kennt, von denen man aber weiß, dass $17\tilde{u} + 55\tilde{v} = 1$ ist. Man verwendet nicht direkt die Bezeichnungen u, v, da dies (noch) nicht die Zahlen sind, die man gemäs Behauptung "finden" muss.

  Setze $u := 4\tilde{u}$ *und* $v := 4\tilde{v}$. *Nun folgt:*

$$17u + 55v = 17 \cdot 4\tilde{u} + 55 \cdot 4\tilde{v} = 4 \cdot (17\tilde{u} + 55\tilde{v}) = 4 \cdot 1 = 4$$

- *bereits bekannte Aussagen* $(*)$*:* $\forall x \in [-1,1]\ \exists y \in \mathbb{R}$ *mit* $\sin(y) = x$
  $(**)$*:* $\forall a \in \mathbb{R}: \ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)$
  Behauptung: $\forall x \in [-1,1]\ \exists y \in \mathbb{R}$ *mit* $2\cos(y) - 1 = x$
  Beweis: Sei $x \in [-1,1]$ *beliebig. Dann ist* $x \geq -1$ *und* $x \leq 1$ *und folglich:*

$$\frac{x+1}{2} \geq \frac{-1+1}{2} = 0 > -1 \quad \textit{und} \quad \frac{x+1}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1$$

  Also ist $\frac{x+1}{2} \in [-1,1]$*. Nach der bekannten Aussage* $(*)$ *(angewendet auf* $\frac{x+1}{2}$*) folgt nun:*

$$\exists \tilde{y} \in \mathbb{R} \ \textit{mit} \ \sin(\tilde{y}) = \frac{x+1}{2}$$

  $\boxed{\textit{Wähle}}$ *solch ein* $\tilde{y}$*.*
  Hinweis: Damit man dies tun kann, muss garantiert sein, dass solch ein $\tilde{y}$ überhaupt existiert. Dies wurde aber zuvor mit Hilfe von $(*)$ geklärt. Nun kann man auf eine Zahl $\tilde{y}$ zurückgreifen, von der man weiß, dass $\sin(\tilde{y}) = \frac{x+1}{2}$ ist.
  Setze $y := \tilde{y} + \frac{\pi}{2}$*. Nun folgt:*

$$2\cos(y) - 1 = 2\cos\left(\tilde{y} + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \overset{(**)}{=} 2\sin(\tilde{y}) - 1 = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x + 1 - 1 = x$$

Hinweis: Hierbei ist “wähle “ (als “fixiere“ zu verstehen). Man darf daher für ein Element, dass man “gewählt“hat, nicht einfach ein anderes Objekt einsetzen (wie man das bei der Verwendung einer $\forall$-Aussage tun kann).

Aufgabe 10.7.

Setzen Sie die folgenden Teile zu einem Beweis der jeweils angegebenen Aussage zusammen oder entwickeln Sie einen eigenen Beweis dazu (Jeder Schritt des Beweises muss nachvollziehbar sein.)

ACHTUNG: *Sie benötigen nicht alle Beweisteile.*

(a) *<u>bereits bekannte Aussage:</u>* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{n} < x \; (*)$

<u>Behauptung:</u> $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{\sqrt{n}} < x$

<u>Beweisteile:</u>

$\boxed{\textit{Sei } x \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\textit{Sei } n \in \mathbb{N}.}$ $\boxed{\textit{Wähle } x \in \mathbb{R}^+ \textit{ mit } x > \frac{1}{n}.}$ $\boxed{\textit{Wähle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } \frac{1}{\sqrt{n}} < x.}$

$\boxed{\textit{Wähle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } \frac{1}{n} < x.}$ $\boxed{\textit{Wähle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } \frac{1}{n} < x^2.}$ $\boxed{\textit{Wähle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } \frac{1}{n} < \sqrt{x}.}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } n \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } n \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } \sqrt{x} \textit{ statt } x \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } n \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } x^2 \textit{ statt } x \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } x \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } n \textit{ statt } x \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{n}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ $\boxed{\sqrt{\frac{1}{n}}}$ $\boxed{\frac{1}{n}}$ $\boxed{\frac{1}{x}}$ $\boxed{\sqrt{n^2}}$ $\boxed{\sqrt{x^2}}$

$\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{ und Wahl von }x\text{)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{ und Wahl von }n\text{)}}{=}}$

$\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{)}}{<}}$ $\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{ und Wahl von }x\text{)}}{<}}$ $\boxed{\overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{ und Wahl von }n\text{)}}{<}}$

(b) *<u>bereits bekannte Aussage:</u>* $\forall y \in \mathbb{R}^+ \; \exists x \in \mathbb{R}: \; 2^x = y \; (*)$

<u>Behauptung:</u> $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \; \forall b \in \mathbb{R}^+ \; \exists x \in \mathbb{R}: \; a^x = b$

<u>Beweisteile:</u>

$\boxed{\textit{Seien } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \textit{ und } b \in \mathbb{R}^+.}$ $\boxed{\textit{Setze: } x = v \cdot u}$ $\boxed{\textit{Setze: } x = \frac{v}{u}}$

$\boxed{\textit{Wähle } x \in \mathbb{R}^+ \textit{ mit } a^x = b.}$ $\boxed{\textit{Wähle } u \in \mathbb{R} \textit{ mit } 2^u = a.}$ $\boxed{\textit{Wähle } u \in \mathbb{R} \textit{ mit } 2^a = u.}$

$\boxed{\textit{Wähle } v \in \mathbb{R} \textit{ mit } 2^v = b.}$ $\boxed{\textit{Wähle } v \in \mathbb{R} \textit{ mit } 2^b = v.}$ $\boxed{\textit{(beachte: wegen } a \neq 1 \textit{ ist } u \neq 0\textit{))}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } u \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } y = a \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } u \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } x = a \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } v \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } y = b \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } v \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } x = b \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{\textit{(dass solch ein } x \textit{ existiert, folgt, wenn man } (*) \textit{ auf } a = 2 \textit{ und } b = y \textit{ anwendet)}}$

$\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{x}$ $\boxed{y}$ $\boxed{a^x}$ $\boxed{2^u}$ $\boxed{2^v}$ $\boxed{(2^a)^u}$ $\boxed{(2^u)^x}$ $\boxed{(2^x)^b}$ $\boxed{a^{\left(\frac{v}{u}\right)}}$ $\boxed{a^{v \cdot u}}$ $\boxed{(2^u)^{\frac{v}{u}}}$ $\boxed{(2^u)^{v \cdot u}}$

$\boxed{\overset{\text{(Potenzgesetz)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(nach Wahl von }u\text{)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(nach Wahl von }v\text{)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(nach Wahl von }x\text{)}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{(nach Def. von }x\text{)}}{=}}$

(mögliche) Antwort:

(a) <u>bereits bekannte Aussage:</u> $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{n} < x \; (*)$

<u>Behauptung:</u> $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{\sqrt{n}} < x$

<u>Beweis:</u> Sei $x \in \mathbb{R}^+$.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x^2$. (dass solch ein x existiert, folgt, wenn man $(*)$ auf x^2 statt x anwendet)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{)}}{=} \sqrt{\frac{1}{n}} \overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{ und Wahl von }x\text{)}}{<} \sqrt{x^2} \overset{\text{(Rechenregel für }\sqrt{\cdot}\text{)}}{=} x$$

(b) <u>bereits bekannte Aussage:</u> $\forall y \in \mathbb{R}^+ \; \exists x \in \mathbb{R}: \; 2^x = y \; (*)$

<u>Behauptung:</u> $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \; \forall b \in \mathbb{R}^+ \; \exists x \in \mathbb{R}: \; a^x = b$

<u>Beweis:</u> Seien $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$.

Wähle $u \in \mathbb{R}$ mit $2^u = a$. (dass solch ein u existiert, folgt, wenn man $(*)$ auf $y = a$ anwendet)

Wähle $v \in \mathbb{R}$ mit $2^v = b$. (dass solch ein v existiert, folgt, wenn man $(*)$ auf $y = b$ anwendet)

Setze: $x = \frac{v}{u}$ (beachte: wegen $a \neq 1$ ist $u \neq 0$)

$$a^x \overset{\text{(nach Def. von } x)}{=} a^{\left(\frac{v}{u}\right)} \overset{\text{(nach Wahl von } u)}{=} (2^u)^{\frac{v}{u}} \overset{\text{(Potenzgesetz)}}{=} 2^v \overset{\text{(nach Wahl von } v)}{=} b$$

11. Implikationen und Äquivalenzen

Beweis von Implikationen bzw. Äquivalenzen

11.1. Beweis von Implikationen

Um eine $\boxed{\ldots \Rightarrow \ldots\text{-Aussage}}$ *zu zeigen, verwendet man meist eine der folgenden Möglichkeiten:*

Behauptung:	$A \Rightarrow B$
Beweis:	$A \;\Rightarrow\; \ldots \;\Leftrightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; B$

- *Eine Implikationskette beginnt mit der einen Aussage (links vom Pfeil) und endet mit der anderen (rechts vom Pfeil). Darin kommen nur Implikationen der Form* $\Rightarrow$ *oder Äquivalenzen* $\Leftrightarrow$ *vor, die alle (ggf. mit Hilfe einer geeigneten Anmerkung) offensichtlich richtig sind. Am Ende kann man dann folgern, dass die behauptete Implikation zwischen den beiden Aussagen (die nun ganz links und ganz rechts in der Kette stehen) gilt.*

- *Man zeigt die Aussage, die rechts vom Pfeil steht.*
  Dabei darf man die Aussage, die links vom Pfeil steht, jederzeit nach Belieben benutzen (als wäre es eine bereits gezeigte Aussage). Meist schreibt man sie (der Übersichtlichkeit halber) zu Beginn des Beweises der Implikation als **Voraussetzung** *auf und setzt einen kleinen Hinweis, wenn man sie benutzt.*

Behauptung:	$A \Rightarrow B$
Beweis:	*Vorausgesetzt sei: A.*
	(Beweis von B unter Verwendung von A)

Beispiel:

- *Behauptung:* $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \left(a^2 = b^2 \Rightarrow a = b\right)$
  Beweis 1: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$*. Dann gilt:* $\quad a^2 = b^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \;\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\; a = b$
  (zu $(*)$*: Wegen* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *ist* $\sqrt{a^2} = a$ *und* $\sqrt{b^2} = b$*.)*
  Beweis 2: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$*. Dann gilt:*

$$a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 - b^2 = 0 \;\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\; (a+b)\cdot(a-b) = 0 \;\overset{(**)}{\Rightarrow}\; a - b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$$

  (zu $(*)$*: dritte binomische Formel* , *zu* $(**)$*: wegen* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *ist* $a + b \neq 0$*)*
  Hinweis: Für die beiden Beweise hätten statt den Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ auch Implikationen $\Rightarrow$ genügt. Umgekehrt könnte man sich überlegen, ob man die Implikationen $\Rightarrow$ durch Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ ersetzen darf. Es ist aber (im Rahmen des geforderten Beweises) nicht notwendig, dies zu tun.
  Beweis 3: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$*. Vorausgesetzt sei, dass* $a^2 = b^2$ *gilt. Nun folgt:*

$$a \overset{(*)}{=} \sqrt{a^2} \overset{Vor.}{=} \sqrt{b^2} \overset{(*)}{=} b$$

  (zu $(*)$*: Wegen* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *ist* $\sqrt{a^2} = a$ *und* $\sqrt{b^2} = b$*.)*

- *Behauptung:* $\forall a \in \mathbb{R} : \left(\exists x \in \mathbb{R} : \sin(x) + 3\cos(x) = a^2 \;\Rightarrow\; |a| \leq 2\right)$
  Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$*. Vorausgesetzt sei, dass* $\exists x \in \mathbb{R} : \sin(x) + 3\cos(x) = a^2$ *gilt. (z.z.* $|a| \leq 2$*)*
  Hinweis: "z.z."bedeutet: "zu zeigen" (es wurde hier eingefügt, um die Beweisstruktur klarer zu machen)
  Wähle ein $x \in \mathbb{R}$ *mit* $\sin(x) + 3\cos(x) = a^2$ *(geht nach Vor.).*
  Hinweis: Die Anmerkung: "geht nach Vor." stellt sicher, dass ein solches x existiert und dass daher

das “wähle “ möglich ist.

Nun folgt:

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{\sin(x) + 3\cos(x)} \leq \sqrt{1 + 3 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$$

Hinweis: Jeder Schritt in dieser Kette von Gleichheiten und Abschätzungen muss/kann ggf. noch näher erläutert werden.

- *Behauptung:* $\forall a \in \mathbb{N} : (12 \mid a \Rightarrow 4 \mid a)$

  Hinweis: Bevor wir mit dem Beweis beginnen, müssen Sie sich an die Definition von $\mid$ erinnern.

  Beweis: Sei $a \in \mathbb{N}$. *Setze voraus:* $12 \mid a$. *(z.z.* $4 \mid a$*)*

  Wir wollen zeigen: $\exists x \in \mathbb{N} : a = x \cdot 4$

  Nach Voraussetzung $\exists y \in \mathbb{N} : a = y \cdot 12$ *(Wir wählen solch ein* y*.)*

  Hinweis: Grundsätzlich spielt es natürlich keine Rolle, ob man hier x oder y verwendet. Allerdings ist die Bezeichung x bereits vergeben.

  Setze $x := 3y$. *Es folgt:* $a = y \cdot 12 = y \cdot 3 \cdot 4 = x \cdot 4$

  Also ist gezeigt: $\exists x \in \mathbb{N} : a = x \cdot 4$

  Nach Definition der Teilbarkeitsrelation folgt nun: $4 \mid a$

11.2. Beweis von Äquivalenzen

Um eine $\boxed{\ldots \Leftrightarrow \ldots\text{-Aussage}}$ *zu zeigen, hat man (unter anderem) folgende Möglichkeiten:*

- *Eine Implikationskette beginnt mit der einen Aussage und endet mit der anderen. Darin kommen nur Äquivalenzen* $\Leftrightarrow$ *vor, die alle (ggf. mit Hilfe einer geeigneten Anmerkung) offensichtlich richtig sind. Am Ende kann man dann folgern, dass die behaupteteÄquivalenz zwischen den beiden Aussagen (die nun ganz links und ganz rechts in der Kette stehen) gilt.*

Behauptung:	$A \Leftrightarrow B$
Beweis:	$A \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B$

- *Man teilt den Beweis in 2 Teile: "⇒" und "⇐".*
  Beide Implikationen zeigt man dann separat, beispielsweise mit einer der Methoden aus (i).

Behauptung:	$A \Leftrightarrow B$
Beweis:	$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ *Vorausgesetzt sei: A.*
	(Beweis von B unter Verwendung von A)
	$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ *Vorausgesetzt sei: B.*
	(Beweis von A unter Verwendung von B)

Beispiel:

- *Behauptung:* $\forall x \in \mathbb{R} : \big(8x + 4 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}\big)$
  Beweis 1: *Sei* $x \in \mathbb{R}$*. Dann gilt:*

$$8x + 4 = 5 \overset{-4}{\Leftrightarrow} 8x = \overset{:8}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{8}$$

  (man beachte, dass es sich (bekanntlich) um allgemeingültige Äquivalenzen handelt, wenn man bei einer Gleichung auf beiden Seiten -4 *bzw.* $:8$ *rechnet)*
  Beweis 2: *Sei* $x \in \mathbb{R}$*.*
  $\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ *Vorausgesetzt ist:* $x = \frac{1}{8}$ *(z.z.* $8x + 4 = 5$*)*

$$8x + 4 \overset{Vor.}{=} 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 = 1 + 4 = 5$$

  $\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ *Vorausgesetzt ist:* $8x + 4 = 5$ *(z.z.* $x = \frac{1}{8}$*)*

$$x = \frac{1}{8} \cdot 8x = \frac{1}{8} \cdot (8x + 4 - 4) \overset{Vor.}{=} \frac{1}{8} \cdot (5 - 4) = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

- *Behauptung:* $\forall a, b \in \mathbb{N}: \; a \mid b \;\Leftrightarrow\; a^2 \mid b^2$

  Beweis: *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$.

  $\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ *Vorausgesetzt ist:* $a \mid b$.

  $\Rightarrow \;\exists x \in \mathbb{N}: \; x \cdot a = b$ *(wähle solch ein* x*)*

  Wir zeigen: $\exists y \in \mathbb{N} : b^2 = y \cdot a^2$

  $\big[$*dazu: Setze* $y := x^2$*. Dann ist* $y \in \mathbb{N}$ *und es gilt:* $\quad b^2 = (x \cdot a) = x^2 \cdot a^2 = y \cdot a^2\big]$

  Also folgt (nach Definitin von $|$*):* $a^2 \mid b^2$

  $\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$ *Vorausgesetzt ist:* $a^2 \mid b^2$

  $\Rightarrow \;\exists x \in \mathbb{N}: \; x \cdot a^2 = b^2$ *(wähle solch ein* x*)*

  Wir zeigen: $\exists y \in \mathbb{N} : b = y \cdot a$

  $\big[$*hier kommen wir aktuell nicht weiter, da bei der Wahl* $y := \sqrt{x}$ *nicht garantiert ist, dass* $y \in \mathbb{N}$ *ist*$\big]$

  BEWEIS NICHT VOLLSTÄNDIG (Aussagen zur Prinfaktor-Zerlegung nötig)

- <u>*Behauptung:*</u> $\forall x \in \mathbb{R}: \ \left[(\exists y \in \mathbb{R} : x = e^y) \ \Leftrightarrow \ \left(\forall z \in \mathbb{R} : x > -z^2\right)\right]$

  <u>*Beweis:*</u> *Sei* $x \in \mathbb{R}$.

  $\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ *Vorausgesetzt ist:* $\exists y \in \mathbb{R} : x = e^y$ *(Wir wählen solch ein* y*.)*

  (z.z. $\forall z \in \mathbb{R} : x > -z^2$*)*

  Sei $z \in \mathbb{R}$*. Dann gilt:* $\quad x = e^y > 0 \geq -z^2$

  $\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$ *Vorausgesetzt ist:* $\forall z \in \mathbb{R} : x > -z^2 \ (*)$

  (z.z. $\exists y \in \mathbb{R} : x = e^y$*)*

  Wendet man die Voraussetzung auf $z = 0$ *an, so folgt:* $x > -0^2 = 0$

  Setze nun $y = \ln(x)$ *(beachte: Wegen* $x > 0$ *ist* $\ln(x)$ *definiert.)*

  Dann gilt: $\quad e^y = e^{\ln(x)} = x$

Aufgabe 11.3.

Setzen Sie die folgenden Teile zu einem Beweis der jeweils angegebenen Aussage zusammen oder entwickeln Sie einen eigenen Beweis dazu (Jeder Schritt des Beweises muss nachvollziehbar sein.)

(a) <u>*Behauptung:*</u> $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-4x + 15y < 3y \Leftrightarrow x > 3y)$

<u>*Beweisteile für Beweis 1:*</u>

$\boxed{\textit{Seien } x, y \in \mathbb{R}.}$ $\boxed{-4x + 15y < 3y}$ $\boxed{x > 3y}$ $\boxed{-4x > -12y}$

$\boxed{\overset{-15y}{\Leftrightarrow}}$ $\boxed{\overset{:(-4)}{\Leftrightarrow}}$

<u>*Beweisteile für Beweis 2:*</u>

$\boxed{\textit{Seien } x, y \in \mathbb{R}.}$ $\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ $\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$

$\boxed{\textit{Setze voraus: } -4x + 15y < 3y}$ $\boxed{\textit{(z.z. } -4x + 15y < 3y\textit{)}}$

$\boxed{\textit{Setze voraus: } x > 3y}$ $\boxed{\textit{(z.z. } x > 3y\textit{)}}$

$\boxed{-4x + 15y}$ $\boxed{3y}$ $\boxed{3y}$ $\boxed{x}$ $\boxed{-4 \cdot (3y) + 15y}$ $\boxed{\frac{1}{4} \cdot (15y - 3y)}$

$\boxed{-12y + 15y}$ $\boxed{\frac{1}{4} \cdot 4x}$ $\boxed{\frac{1}{4} \cdot 12y}$ $\boxed{\frac{1}{4} \cdot (15y - (-4x + 15y))}$

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\overset{Vor.}{<}}$ $\boxed{\overset{Vor.}{<}}$

(b) *Behauptung:* $\forall a, b \in \mathbb{N} : (a \mid b \Leftrightarrow a \mid (4a + b))$

Beweisteile:

$\boxed{\textit{Seien } a, b \in \mathbb{N}.}$ $\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ $\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$

$\boxed{\textit{Nach Definition von } \mid \textit{ folgt:}}$ $\boxed{\textit{Nach Definition von } \mid \textit{ folgt aus der Voraussetzung:}}$

$\boxed{\textit{Nach Definition von } \mid \textit{ folgt:}}$ $\boxed{\textit{Nach Definition von } \mid \textit{ folgt aus der Voraussetzung:}}$

$\boxed{\textit{Setze voraus: } a \mid b}$ $\boxed{(\textit{z.z. } a \mid b)}$ $\boxed{\textit{Setze voraus: } a \mid (4a + b)}$ $\boxed{(\textit{z.z. } a \mid (4a + b))}$

$\boxed{(\textit{wähle solch ein } x)}$ $\boxed{(\textit{wähle solch ein } x)}$ $\boxed{\textit{Setze nun } y = 4 + x.}$ $\boxed{\textit{Setze nun } y = 4 - x.}$

$\boxed{\exists x \in \mathbb{N} : x \cdot a = b}$ $\boxed{\exists x \in \mathbb{N} : x \cdot a = 4a + b}$ $\boxed{a \mid b}$ $\boxed{a \mid (4a + b)}$

$\boxed{\textit{Damit ist gezeigt: } \exists y \in \mathbb{N} : y \cdot a = b}$ $\boxed{\textit{Damit ist gezeigt: } \exists y \in \mathbb{N} : y \cdot a = 4a + b}$

$\boxed{\overset{(\textit{Def. von } y)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\textit{Def. von } y)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\textit{Wahl von } x)}{=}}$ $\boxed{\overset{(\textit{Wahl von } x)}{=}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

$\boxed{b}$ $\boxed{ya}$ $\boxed{ya}$ $\boxed{4a + b}$ $\boxed{4a + xa}$ $\boxed{xa - 4a}$ $\boxed{4a + b - 4a}$ $\boxed{(4 - x)a}$ $\boxed{(4 + x)a}$

(mögliche) Antwort:

(a) Behauptung: $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-4x + 15y < 3y \Leftrightarrow x > 3y)$

Beweis 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

$$-4x + 15y < 3y \overset{-15y}{\Longleftrightarrow} -4x < -12y \overset{:(-4)}{\Longleftrightarrow} x > 3y$$

Beweis 2: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ Setze voraus: $-4x + 15y < 3y$

(z.z. $x > 3y$)

$$3y = \frac{1}{4} \cdot 12y = \frac{1}{4} \cdot (15y - 3y) \overset{\text{Vor.}}{<} \frac{1}{4} \cdot (15y - (-4x + 15y)) = \frac{1}{4} \cdot 4x = x$$

$\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$ Setze voraus: $x > 3y$

(z.z. $-4x + 15y < 3y$)

$$-4x + 15y \overset{\text{Vor.}}{<} -4 \cdot (3y) + 15y = -12y + 15y = 3y$$

(b) Behauptung: $\forall a, b \in \mathbb{N} : (a \mid b \Leftrightarrow a \mid (4a + b))$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ Setze voraus: $a \mid b$ (z.z. $a \mid (4a + b)$)

Nach Definition von | folgt aus der Voraussetzung: $\exists x \in \mathbb{N} : x \cdot a = b$ (wähle solch ein x)

Setze nun $y = 4 + x$. Dann gilt

$$4a + b \overset{\text{(Wahl von } x)}{=} 4a + xa = (4 + x)a \overset{\text{(Def. von } y)}{=} ya$$

Damit ist gezeigt: $\exists y \in \mathbb{N} : y \cdot a = 4a + b$

Nach Definition von | folgt: $a \mid (4a + b)$

$\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$ Setze voraus: $a \mid (4a + b)$ (z.z. $a \mid b$)

Nach Definition von | folgt aus der Voraussetzung: $\exists x \in \mathbb{N} : x \cdot a = 4a + b$ (wähle solch ein x)

Setze nun $y = x - 4$. Dann gilt $b = 4a + b - 4a \overset{\text{(Wahl von } x)}{=} xa - 4a = (x - 4)a \overset{\text{(Def. von } y)}{=} ya$

Damit ist gezeigt: $\exists y \in \mathbb{N} : y \cdot a = b$

Nach Definition von | folgt: $a \mid b$

Widerspruchsbeweis und Kontraposition

11.4. Widerspruchsbeweise

Um eine Aussage zu zeigen, funktioniert manchmal folgendes Prinzip: Man nimmt an (stellt sich vor), die Aussage wäre falsch. Dann überlegt man, welche Folgerungen (Konsequenzen) sich daraus ergeben würden. Kommt man dabei (durch logische Schlussfolgerungen) zu dem Ergebnis, dass etwas gilt, was offensichtlich falsch ist, so hat man einen sogenannten **Widerspruch**. *Die Idee dahinter ist die Folgende: Der Widerspruch kann nur dadurch zustande gekommen sein, dass die anfangs getroffene* **Annahme** *falsch war. Dies bedeutet dann, dass die ursprünglich zu beweisende Aussage richtig gewesen muss. (Damit hat man sie in der Tat bewiesen.)*

Behauptung:	A
Beweis:	*Annahme:* $\neg A$.
	(folgere unter Verwendung von $\neg A$ *etwas, was offensichtlich falsch ist)*
	Widerspruch
	Also muss A *gelten.*

Beispiel:

- *Behauptung:* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
  Beweis: $\boxed{\text{Annahme:}}$ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
  $\Rightarrow$ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^+$ *Wurzel ist nicht-negativ*
  $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\exists a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $ggT(a,b) = 1$ *und* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ *(Wähle solche* a, b.*)*
  $\big($*zu* $(*)$*: Es wurde bereits gezeigt:* $\forall q \in \mathbb{Q}^+ \ \exists a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $ggT(a,b) = 1$ *und* $q = \frac{a}{b}\big)$
  $\Rightarrow$ $2 = \frac{a^2}{b^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a^2 = 2b^2}$
  –) $\Rightarrow$ a^2 *gerade* $\Rightarrow$ a *gerade* $\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{N}: \ a = 2c$
  –) *In die umrahmte Gleichung einsetzen* $\Rightarrow$ $(2c)^2 = 2b^2$ $\Rightarrow$ $4c^2 = 2b^2$ $\Rightarrow$ $2c^2 = b^2$
  $\Rightarrow$ b^2 *gerade* $\Rightarrow$ b *gerade*
  –) *Wir wissen nun:* a, b *beide gerade* *und* $ggT(a,b) = 1$
  Das kann nicht sein: Widerspruch
  (Also war die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ *falsch und es gilt daher die Behauptung* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*)*
  Hinweis: Die Spiegelstriche dienen der Gleiderung des Beweises. An diesen Stellen beginnen neue Argumentationsketten, innerhalb derer auf zuvor Gezeigtes zurückgegriffen werden kann. (Das erleichtert es dem Leser, dem Beweis zu folgen.)

11.5. Das Prinzip der Kontraposition

Für zwei beliebige Aussagen A und B sind die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ stets äquivalent (d.h. sie sind entweder beide wahr oder beide falsch).

Hinweis: Machen sie sich klar, warum das so ist.

Anstatt eine Implikation $A \Rightarrow B$ direkt zu beweisen, ist es manchmal einfacher, die zugehörige **Kontraposition** $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ *zu zeigen.*

Behauptung:	$A \Rightarrow B$
Beweis:	*mit Kontraposition: es wird* $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ *gezeigt*
	Vorausgesetzt sei: $\neg B$.
	(Beweis von $\neg A$ unter Verwendung von $\neg B$)

Alternativ kann solch ein Beweis auch als Widerspruchsbeweis formuliert werden: Man setzt zunächst (wie zuvor auch) A voraus und macht dann (um B zu zeigen) die Annahme, dass $\neg B$ gilt. Kommt man dann (unter Verwendung von $\neg B$) zu dem Schluss, dass $\neg A$ gilt, hat man sofort einen Widerspruch zu A und damit die Annahme widerlegt und somit B gezeigt.

Behauptung:	$A \Rightarrow B$
Beweis:	*Setze voraus A. (z.z. B)*
	Annahme: $\neg B$.
	(Beweis von $\neg A$ unter Verwendung von $\neg B$)
	Widerspruch zur Voraussetzung A
	Also muss B gelten.

Beispiel:

- *bereits bekannte Aussage* $(*)$ $\forall a, b \in \mathbb{N} : a, b$ *ungerade* $\Rightarrow$ $a \cdot b$ *ungerade*
  Behauptung: $\forall a \in \mathbb{N} : a^2$ *gerade* $\Rightarrow$ a *gerade*
  Beweis: *Sei* $a \in \mathbb{N}$.
  Beweis der Implikation mit Kontraposition, es wird gezeigt:

  $$a \text{ ungerade} \Rightarrow a^2 \text{ ungerade}$$

  Setze voraus: a ungerade
  Zu zeigen: a^2 ungerade
  Auf das Produkt $a^2 = a \cdot a$ kann man $(*)$ anwenden, denn nach Voraussetzung sind beide Fakoren ungerade.
  Es folgt: a^2 ungerade

- *Behauptung:* $\forall a,b \in \mathbb{N} : (a \nmid (a+b) \;\Rightarrow\; a \nmid b)$
  Beweis: *Seien* $a,b \in \mathbb{N}$.
  Beweis der Implikation mit Kontraposition, es wird gezeigt: $\quad a \mid b \;\Rightarrow\; a \mid (a+b)$
  Setze voraus: $a \mid b \overset{\text{Def.} \mid}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{N} : x \cdot a = b$ *(wähle solch ein k)*
  Setze $y := x+1$. *Dann ist* $y \in \mathbb{N}$ *und es gilt:* $\quad y \cdot a = (x+1) \cdot a = x \cdot a + 1 \cdot a = b + a = a + b$
  Also haben wir gezeigt: $\quad \exists y \in \mathbb{N}$ *mit* $y \cdot a = a + b \quad \overset{\text{Def.} \mid}{\Rightarrow} \quad a \mid (a+b)$

- *Behauptung:* $\forall p,q \in \mathbb{R} : \left(p^2 - 4q < 0 \;\Rightarrow\; \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q \neq 0\right)$
  Beweis: *Seien* $p,q \in \mathbb{R}$.
  Beweis der Implikation mit Kontraposition, es wird gezeigt:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q = 0 \;\Rightarrow\; p^2 - 4q \geq 0$$

Setze voraus: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q = 0$ *(wähle solch ein x)*

$$x^2 + px + q = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} \;\Rightarrow\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \; \frac{p^2-4q}{4} \geq 0 \;\Rightarrow\; p^2 - 4q \geq 0$ *(an der Stelle* $(*)$ *wurde benutzt:* $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$*)*
Beweis (anders formuliert): *Seien* $p,q \in \mathbb{R}$.
Setze voraus: $p^2 - 4q < 0$ *(z.z.:* $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q \neq 0$*)*
Annahme: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q = 0$ *(wähle solch ein x)*

$$x^2 + px + q = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} \;\Rightarrow\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \; \frac{p^2-4q}{4} \geq 0 \;\Rightarrow\; p^2 - 4q \geq 0$ *(an der Stelle* $(*)$ *wurde benutzt:* $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$*)*
Nun haben wir: $\quad p^2 - 4q < 0$ *(Vor., s.o.)* $\quad$ *und* $\quad p^2 - 4q \geq 0$ *(soben gezeigt)* $\quad \Rightarrow$ *Widerspruch*
(Also war die Annahme falsch und damit ist das, was z.z. war, richtig.)

Nutzung von (bereits bekannten) Implikationen bzw. Äquivalenzen

11.6. Einsatz von (bereits bekannten) Implikationen

Implikationen, die zuvor bereits bewiesen wurden, können wie folgt in kommenden Beweisen benutzt werden:

- *Eine bereits bekannte Implikation* $\boxed{A \Rightarrow B}$ *kann in einem neuen Beweis benutzt werden, wenn man in diesem Beweis zeigen kann, dass A erfüllt ist. Dann kann man nämlich direkt (ggf. mit einem Hinweis auf die bereits bekannte Implikation) folgern, dass B auch erfüllt ist. (Damit kann B im weiteren Verlauf des Beweises verwendet werden.)*
- *Eine bereits bekannte Äquivalenz* $\boxed{A \Leftrightarrow B}$ *kann in einem neuen Beweis in zwei Richtungen benutzt werden*
  - *-) Wenn man zeigen kann, dass A erfüllt ist, kann man direkt folgern, dass B auch erfüllt ist (und B anschließend verwenden).*
  - *-) Wenn man zeigen kann, dass B erfüllt ist, kann man direkt folgern, dass A auch erfüllt ist (und A anschließend verwenden).*

Beispiel:

- *bereits bekannte Aussage* $(*)$: $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid a^2$
  bereits bekannte Aussage $(**)$: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a \mid b \land b \mid c \;\Rightarrow\; a \mid c)$
  Behauptung: $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid a^4$
  Beweis: Sei $a \in \mathbb{N}$.
  Wegen $(*)$ *angewendet auf* a *gilt:* $a \mid a^2$.
  Wegen $(*)$ *angewendet auf* a^2 *statt* a *gilt:* $a^2 \mid a^4$.
  Nun ist gezeigt, dass die Voraussetzung von $(**)$ *mit* a *statt* a, a^2 *statt* b *und* a^4 *statt* c *erfüllt ist.*
  Hinweis: Bei der Voraussetzung von $(**)$ handelt es sich um eine $\land$-Aussage. Um diese Voraussetzung zu zeigen, müssen wir beide Einzel-Aussagen zeigen.
  Man kann also $(**)$ *(mit* a *statt* a, a^2 *statt* b *und* a^4 *statt* c*) anwenden:* $\quad\Rightarrow\quad a \mid a^4$.

  Kürzer wäre hier $a^4 = a^3 \cdot a = x \cdot a$ *mit* $x = a^3 \in \mathbb{N}$. *Nach Definition gilt dann* $a|a^4$

- *bereits bekannte Aussage* $(*)$*:* $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; \exists a, b \in \mathbb{N} : x = \frac{a}{b} \right)$

  Behauptung: $\forall u, v \in \mathbb{R}^+ : (u, v \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; u + v \in \mathbb{Q})$

  Beweis: Seien $u, v \in \mathbb{R}+$*. Setze voraus:* $u, v \in \mathbb{Q}$*.*

  Wende die Implikation "$\Rightarrow$*" von* $(*)$ *auf* u *an:* $\quad \Rightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{N} : u = \frac{a}{b}$ *(wähle solche* a, b*)*

  Wende die Implikation "$\Rightarrow$*" von* $(*)$ *auf* v *an:* $\quad \Rightarrow \quad \exists c, d \in \mathbb{N} : v = \frac{c}{d}$ *(wähle solche* c, d*)*

  Setze $n := ad + bc$ $(\Rightarrow n \in \mathbb{N})$ *und* $m := bd$ $(\Rightarrow m \in \mathbb{N})$

  $$\text{Es folgt:} \quad u + v = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{n}{m}$$

  Also wurde gezeigt: $\exists n, m \in \mathbb{N} : u + v = \frac{n}{m}$

  Wende die Implikation "$\Leftarrow$*" von* $(*)$ *auf* $u + v$ *an:* $\quad \Rightarrow \quad u + v \in \mathbb{Q}$

  (beachte, dass man $(*)$ *auf* $u + v$ *anwenden darf, denn wegen* $u, v \in \mathbb{R}^+$ *ist auch* $u + v \in \mathbb{R}^+$*)*

- <u>*bereits bekannte Aussage* $(*)$</u>*:* $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \cdot y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee y = 0)$

  <u>*Behauptung:*</u> $\forall a, b \in \mathbb{R} : \left(a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b \vee a = -b\right)$

  <u>*Beweis:*</u> *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$.

  $\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$ *Setze voraus* $a^2 = b^2$.

  Dann gilt: $0 \overset{(folgt\ aus\ Vor.)}{=} a^2 - b^2 \overset{(bin.\ Formel)}{=} (a+b) \cdot (a-b)$

  Man kann also “⇒“ von $(*)$ *nun auf* $x = a + b$ *und* $y = a - b$ *anwenden und es folgt:*

  $$a + b = 0 \vee a - b = 0 \quad \overset{-b\ bzw.\ +b}{\Rightarrow} \quad a = -b \vee a = b$$

  $\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$ *Setze voraus* $a = b \vee a = -b$.

  $$\overset{-b\ bzw.\ +b}{\Rightarrow} \quad a + b = 0 \vee a - b = 0$$

  Man kann also “⇐“ von $(*)$ *nun auf* $x = a + b$ *und* $y = a - b$ *anwenden und es folgt:*

  $$(a + b) \cdot (a - b) = 0$$

  Folglich ist:

  $$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 \overset{(bin.\ Formel)}{=} \underbrace{(a+b) \cdot (a-b)}_{=0} + b^2 = 0 + b^2 = b^2$$

Umformen einer Behauptung

11.7. Beweis durch Folgerungen

Man kann eine Aussage A auch zeigen, indem man sie solange äquivalent umformt (d.h. man verwendet allgemeingültige Äquivalenzen) bis man eine offensichtlich (oder bekanntermaßen) wahre Aussage erhält. Dann kann man schließen, dass auch die ursprünglich zu zeigende Aussage wahr ist. Es genügt dabei bereits, wenn die Implikationspfeile von der offenbar wahren Aussage zu der Behauptung gültig sind.

Behauptung:	A
Beweis:	$A \Leftarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftarrow \ldots \Leftrightarrow \underbrace{\ldots}_{\textit{offensichtlich wahr}}$

Beispiel:

- <u>*Behauptung:*</u> $\sqrt{98}+\sqrt{102}<\sqrt{99}+\sqrt{101}$

  <u>*Beweis:*</u>

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{98}+\sqrt{102}<\sqrt{99}+\sqrt{101} \\
\overset{\text{beide Seiten quadrieren}}{\Leftrightarrow}\; & \left(\sqrt{98}+\sqrt{102}\right)^2<\left(\sqrt{99}+\sqrt{101}\right)^2 \qquad (\textit{geht, da beide Seiten} >0 \textit{ sind}) \\
\overset{\text{binomische Formel}}{\Leftrightarrow}\; & 98+2\cdot\sqrt{98}\cdot\sqrt{102}+102<99+2\cdot\sqrt{99}\cdot\sqrt{101}+101 \\
\overset{\text{beide Seiten } -200}{\Leftrightarrow}\; & 2\cdot\sqrt{98}\cdot\sqrt{102}<2\cdot\sqrt{99}\cdot\sqrt{101} \\
\overset{\text{beide Seiten } :2}{\Leftrightarrow}\; & \sqrt{98}\cdot\sqrt{102}<\sqrt{99}\cdot\sqrt{101} \\
\overset{\text{beide Seiten quadrieren}}{\Leftrightarrow}\; & 98\cdot 102<99\cdot 101 \qquad (\textit{geht, da beide Seiten} >0 \textit{ sind}) \\
\overset{\text{beide Seiten ersetzen}}{\Leftrightarrow}\; & (100-2)\cdot(100+2)<(100-1)\cdot(100+1) \\
\overset{\text{binomische Formel}}{\Leftrightarrow}\; & 100^2-2^2<100^2-1^2 \\
\overset{\text{beide Seiten } -100^2}{\Leftrightarrow}\; & -4<-1 \\
\overset{\text{beide Seiten } \cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\; & \boxed{4>1} \leftarrow \textit{offensichtlich wahre Aussage}
\end{aligned}
$$

- <u>*Behauptung:*</u> $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; x + \frac{1}{x} \geq 2$
  <u>*Beweis:*</u> *Sie* $x \in \mathbb{R}^+$. *Dann gelten die Aquivalenzen:*

$$
\begin{aligned}
& x + \frac{1}{x} > 2 \\
\overset{\textit{beide Seiten } \cdot x}{\Leftrightarrow} \quad & x^2 + 1 \geq 2x \quad (\textit{geht, da } x > 0 \textit{ ist}) \\
\overset{\textit{beide Seiten } -2x}{\Leftrightarrow} \quad & x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\
\overset{\textit{binomische Formel}}{\Leftrightarrow} \quad & \boxed{(x-1)^2 \geq 0} \; \leftarrow \textit{offensichtlich wahre Aussage, (denn } \forall a \in \mathbb{R} : \; a^2 \geq 0)
\end{aligned}
$$

Hinweis: In beiden Beispielen hätte es genügt, sicherzustellen, dass die Rückrichtungen "⇐" gültig sind.